Universidad de la República **Geometría y álgebra lineal 2**
Facultad de ingeniería - IMERL **Segundo semestre 2024**

PRÁCTICO 11: ISOMETRÍAS EN $\mathbb{R}^2$ Y $\mathbb{R}^3$.

EJERCICIO 1. [Examen agosto de 2000, ej 5.]
Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una simetría respecto de un plano por el origen π. Indicar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Justificar.

A. Existe $\mathcal{B}$ base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ tal que ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

B. Si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ bases ortonormales existe P ortogonal tal que
$$P \cdot ({}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}) \cdot P^t = {}_{\mathcal{B}'}(T)_{\mathcal{B}'}.$$

C. $T \circ T \circ T$ es una rotación de ángulo y eje de dirección normal a π.

EJERCICIO 2. [Examen julio de 2003, ej 7.] Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x) = Ax$ con $A = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$. Clasificar (indicar si es una simetría, rotación) y hallar sus elementos (eje de simetría, ángulos, etc).

EJERCICIO 3. [Examen agosto de 2000, ej 6.] Sea V espacio vectorial de dimensión finita con producto interno. S es un subespacio no trivial y $P_S : V \to V$ es la proyección ortogonal de sobre S. Sea $T : V \to V$ tal que $T = Id - 2P_S$. Indicar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Justificar.

A. Existe $\mathcal{B}$ base ortonormal de V tal que ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$.
B. $\langle T(v), w\rangle = \langle v, T(w)\rangle$ para todo $v, w \in V$ (T es autoadjunta).
C. $\langle T(v), T(w)\rangle = \langle v, w\rangle$ para todo $v, w \in V$ (T es unitaria).

EJERCICIO 4. [Examen febrero de 2000, ej 10.] Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformación ortogonal tal que en una base ortonormal $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$
$${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Clasificar T (indicar si es una simetría, rotación, etc.) y hallar sus elementos (planos de simetría, ejes, ángulos, etc.).

EJERCICIO 5. [Examen julio de 2003, ej 2] Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ simetría respecto de $x + y - z = 0$. Sean
$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1) \right\},$$
$$\mathcal{E} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$
Hallar ${}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}}$. Indicar si existe P ortogonal tal que $P \cdot {}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} \cdot P^t = {}_{\mathcal{E}}(T)_{\mathcal{E}}$. Justificar.

EJERCICIO 6. [Segundo parcial 1999.] Sean $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tales que
$$T_1(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y, x + y), \quad T_2(x, y) = (y, x).$$
Clasificar $T_2 \circ T_1 \circ T_1$.

Ejercicio 7. [Segundo parcial 1999.] Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ortogonal tal que $T(x, y, z) = (ax + y, x, z)$. Hallar a, clasificar y hallar elementos.

Ejercicio 8. Hallar la matriz asociada en la base canónica de las siguientes isometrías lineales:

A. La rotación $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de ángulo $\dfrac{\pi}{3}$.
B. La simetría $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ respecto de la recta $y = 2x$.
C. La simetría $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ respecto del plano $x + y - z = 0$.
D. La rotación $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de ángulo $\dfrac{\pi}{4}$ y eje $[(1, 0, 1)]$.

Ejercicio 9. Sea T la transformación lineal tal que

$$_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Probar que T es una rotación y hallar sus elementos.