Cálculo diferencial e intelgral en una variable, segundo semestre 2024

Departamento de Matemática y Aplicaciones;
Cure–Universidad de la República

Solución segundo parcial

Ejercicio 1

Sea la curva $y = x^2 - 5x - 1$.

a) Mostar que el punto $(2, -7)$ pertenece a la curva y hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en dicho punto.

b) Hallar el punto de intersección de la recta $y = -3x - 2$ con la curva considerada anteriormente y mostrar que dicha recta es tangente a la curva.

Solución

a) $(x^2 - 5x - 1)(2) = 4 - 10 - 1 = -7$. Calculamos la derivada de $f(x) = x^2 - 5x - 1 \quad , \quad f'(x) = 2x - 5$ y la evaluamos en 2. $f'(2) = -1$. Luego la tangente es: $y - f(2) = (-1)(x - 2)$ o sea $y - (-7) = -x + 2$ o sea $y = -x - 5$.

b) Los puntos de intersección se calculan a partir de las raíces de la ecuación $x^2 - 5x - 1 = -3x - 2$ o sea $x^2 - 2x + 1 = 0$ o sea $x = 1$ como raíz doble. Luego hay un solo punto de intersección que es $P = (1, -5)$. Ahora recordamos la derivada de $f(x) = x^2 - 5x - 1$ que es $f'(x) = 2x - 5$ y $f'(1) = -3$ y escribimos la ecuación de la tangente $y - (-5) = (-3)(x - 1)$ o sea $y = -3x - 2$ lo que garantiza que la recta es la tangente a la curva en el punto P.

Ejercicio 2

Sea $f(x) = \log(\tan(x))$ definida en el intervalo $[0, \pi/2)$.

a) Calcular $f'(x)$.

b) Usando que la función logaritmo y la función exponencial son inversas una de la otra, calcular el límite $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{f(x)}}{5x}$.

Solución

a) Calculamos la derivada de $f(x) = \log(\tan(x))$ y tenemos que

$$f'(x) = \frac{1}{\tan(x)} \cdot \frac{d}{dx}[\tan(x)] = \frac{1}{\tan(x)} \cdot \sec^2(x).$$

Recordando que $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ y $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$, obtenemos que:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\cos^2(x)}}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}} = \frac{1}{\cos(x)\sin(x)}$$

b) Evaluamos el límite: Dado que $e^{f(x)} = e^{\log(\tan(x))} = \tan(x)$ (porque la función exponencial es la inversa del logaritmo), entonces:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{f(x)}}{5x} = \frac{1}{5} \lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \frac{1}{5}$$

Ejercicio 3

Sea $f(x) = x^2 + 2x - 1$.

a) Encontrar los puntos críticos de f.

b) Determinar el valor máximo y mínimo de f en el intervalo $[-2, 1]$.

Solución

a) La derivada es: $f'(x) = 2x + 2$ y los puntos críticos son $2x + 2 = 0$. Luego $x = -1$ es el único punto crítico.

b) Evaluamos $f(x)$ en $x = -2, -1, 1$: $f(-2) = -1, f(-1) = -2, f(1) = 2$ y resulta que el valor mínimo es -2 y lo toma en $x = -1$ y el máximo es 2 y lo toma en $x = 1$.

Ejercicio 4

Sea $f(x) = ax^2 - 2x$.

a) Calcular la derivada de f y dibujar su gráfico para los valores positivos, negativos y cero de a. Encontrar el valor de a para que f' sea una función creciente en $\mathbb{R}$.

b) Para $a = 1$, hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

Solución

a) La derivada es $f'(x) = 2ax - 2$. Entonces los gráficos son rectas. Cuando $a = 0$ caso en que la derivada en negativa en todo $\mathbb{R}$ y entonces f es decreciente en todo $\mathbb{R}$

b) Si $a = 1$: $f'(x) = 2x - 2$ Igualamos a cero para obtener el punto crítico: $2x - 2 = 0 \implies x = 1$. Analizamos el signo de la derivada: $f'(x) < 0$ si $x < 1$, $f'(x) > 0$ si $x > 1$. Entonces, f es decreciente en $(-\infty, 1)$ y creciente en $(1, \infty)$.

Ejercicio 5

Sea $f(x) = x^3 + x$.

a) Calcular $f'(x)$ y concluir que la función es creciente y explicar porqué la función es invertible.

b) Sea g la función inversa de f. Calcular $g'(f(1))$.

Solución

a) La derivada es $f'(x) = 3x^2 + 1$. En $x = 1$:

$$f'(1) = 3(1)^2 + 1 = 4 > 0$$

Como $f'(x) > 0$ para todo x podemos concluir que es creciente e invertible.

b) La derivada de la función inversa es: $g'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$ Evaluando en $x = 1$ tenemos que

$$g'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$$