PRÁCTICO 10: OPERADORES ORTOGONALES Y UNITARIOS.

A menos que se indique lo contrario, considerar en $\mathbb{R}^n$ y en $\mathbb{C}^n$ los productos internos usuales, en $\mathbb{R}_n[x]$ el producto interno $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$ y en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ el producto interno $\langle A, B\rangle = tr(AB^t)$.

1. Isometrías, operadores ortogonales y unitarios

EJERCICIO 1. Probar que las siguientes transformaciones lineales son isometrías y determinar si son sobreyectivas.

A. $T : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(p) = (a + \frac{b}{2}, \frac{b}{2\sqrt{3}})$ si $p(x) = a + bx$.

B. $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \left(\frac{-a+2b+2c}{3}, \frac{2a-b+2c}{3}, \frac{2a+2b-c}{3}, d\right).$$

C. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 2.

A. Sea $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Probar que T es ortogonal.

B. Sea $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ tal que $T(1,1) = (-i, i)$ y $T(1,-1) = (i,i)$. Probar T es unitaria.

C. Se considera $\mathbb{R}^4$ con el producto interno habitual. Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$\begin{aligned} T(2,2,2,2) &= (4,0,0,0), \qquad T(2,0,2,2) = (3,-1,1,1), \\ T(2,2,0,2) &= (3,1,-1,1), \qquad T(2,2,2,0) = (3,1,1,-1). \end{aligned}$$

¿ Es T es ortogonal?

EJERCICIO 3. Probar que la composición de transformaciones lineales unitarias (ortogonales) es unitaria (ortogonal).

EJERCICIO 4. ¿Existe un operador unitario $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ que cumpla que $T(1,1) = e^{i(2+i)}(1,1)$?

EJERCICIO 5. Sea V un espacio vectorial con producto interno sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$) y T un operador lineal en V. Probar que:

A. Si T es autoadjunto y unitario (u ortogonal) $\Rightarrow T^2 = Id$.

B. Si T es autoadjunto y $T^2 = Id \Rightarrow T$ es unitario (u ortogonal).

C. Si T es unitario (u ortogonal) y $T^2 = I \Rightarrow T$ es autoadjunto.

EJERCICIO 6. Sea V un espacio con producto interno de dimensión finita sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$) y $S \subset V$ un subespacio no trivial.

A. Si T es un operador unitario en V y S es invariante bajo T, probar que $T|_S$ es un operador unitario (u ortogonal) en S.

B. Si $T : S \to V$ es una transformación lineal tal que $\|T(s)\| = \|s\| \ \ \forall s \in S$, probar que existe un operador unitario (u ortogonal) $\widetilde{T} : V \to V$ tal que $\widetilde{T}(s) = T(s) \ \ \forall s \in S$.

Ejercicio 7. [Segundo parcial 1999.] Sea $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tal que $T(1,0,0) = (1,0,0)$, $T(0,1,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,i,i)$, $T(0,0,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$. Indicar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Justificar.

A. T es unitaria.
B. T preserva la norma.
C. $T|_S : S \to S$ es unitaria donde $S = \{(x,y,z) : x = 0\}$.

2. Representación matricial. Matrices ortogonales y unitarias

Ejercicio 8.

A. Hallar todas las matrices ortogonales cuya primera columna sea colineal con $(1,1)$.
B. Hallar todas las matrices unitarias cuya primera columna sea colineal con $(1,1-i)$.

Ejercicio 9. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

A. Probar que A es ortogonal $\Leftrightarrow$ A^t es ortogonal.
B. Deducir que A es ortogonal $\Leftrightarrow$ sus filas forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, considerado con el producto interno habitual.
C. Enunciar y demostrar el resultado análogo para matrices complejas unitarias.

Ejercicio 10.

A. Mostrar que la matriz $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{i\theta} & e^{-i\theta} \\ ie^{i\theta} & -ie^{-i\theta} \end{pmatrix}$ es unitaria para todo $\theta \in \mathbb{R}$.
B. Mostrar que si P es una matriz ortogonal entonces $e^{i\theta}P$ es unitaria para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 11. Demostrar que las matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ es unitaria y determinar D diagonal y P unitaria tal que $A = PD\overline{P}^t$.

Ejercicio 12.

A. Verificar que la matriz A es unitaria y hallar una matriz unitaria P tal que $D = \overline{P}^t AP$ sea diagonal.

$$\text{(i)} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(ii)} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(iii)} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B. Observar que las matrices de las partes (b) y (c) son ortogonales. ¿Existe una matriz ortogonal P tal que $D = P^t AP$ sea diagonal?

Ejercicio 13.

A. Sea $\theta \in \mathbb{R}$, se considera en $\mathbb{R}^2$ con el producto interno usual el operador $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$_{\mathcal{C}}(R_\theta)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

a) Probar que R_θ es ortogonal $\forall \theta \in \mathbb{R}$.

b) Determinar los valores de $\theta \in \mathbb{R}$ para los cuales R_θ es diagonalizable.

B. Se considera, en $\mathbb{C}^2$ con el producto interno usual, el operador $U : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ tal que:

$$U(1,i) = \left(e^{i\theta}, ie^{i\theta}\right) \qquad \text{y} \qquad U(1,-i) = \left(e^{-i\theta}, -ie^{-i\theta}\right).$$

a) Probar que U es unitario.

b) Hallar una base ortonormal de $\mathbb{C}^2$ en la cual U se diagonaliza.

c) Tomando combinaciones lineales de $(1,i)$ y $(1,-i)$ construir una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^2$ cuyas componentes sean reales y tal que

$${}_{\mathcal{B}}(U)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$