Cálculo diferencial e intelgral en una variable, segundo semestre 2024

Departamento de Matemática y Aplicaciones;
Cure–Universidad de la República

Tema: Función inversa

§1. Determinar la función inversa.

Determinar si hay una función inversa g para cada una de las funciones siguientes y determinar aquellos números en los que g está definida.

(a) $f(x) = 3x + 2, \quad$ para todo x

(b) $f(x) = x^2 + 2x - 3, \quad 0 \le x$

(c) $f(x) = x^3 + 4x - 5, \quad$ para todo x

(d) $f(x) = \frac{x}{x+1}, \quad -1 < x$

(e) $f(x) = \frac{x}{x+2}, \quad -2 < x$

(f) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad 1 < x$

(g) $f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad 0 < x \le 1$

(h) $f(x) = \frac{-x^2}{x^2+1}, \quad 0 \le x \le 5$

(i) $f(x) = \frac{x+2}{x-2}, \quad 0 \le x < 2$

(j) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}, \quad 1 \le x \le 10$

(k) $f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad 0 < x \le 1$

(l) $f(x) = \frac{x+1}{x}, \quad 0 < x \le 1$

(m) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}, \quad 1 \le x \le 1$

(n) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad 1 \le x$

§2. Derivada de la función inversa.

Hallar la derivada de la función inversa de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

(a) $f(x) = 3x + 2$ en $f(0)$.

(b) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ en $f(0)$.

(c) $f(x) = x^3 + 4x - 5$ en $f(1)$.

(d) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ en $f(2)$.

(e) $f(x) = \frac{x}{x+2}$ en $f(-1)$.

(f) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ en $f(3)$.

(g) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ en $f(1)$.

(h) $f(x) = \frac{-x^2}{x^2+1}$ en $f(1)$.

(i) $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$ en $f(1)$.

(j) $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ en $f(2)$.

(k) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ en $f(\frac{1}{2})$.

(l) $f(x) = \frac{x+1}{x}$ en $f(\frac{1}{3})$.

(m) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ en $f(\frac{1}{5})$.

(n) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ en $f(\frac{2}{3})$.

§3. Arcoseno.

(a) Considerése el coseno definido sólo en el intervalo $[0, \pi]$. Demostrar que existe la función inversa arccos. Decir en qué intervalo está definida y trazar su gráfica.

(b) ¿Cuál es la derivada del arccos?

(c) Sea $g(x) = \operatorname{arcsen} x$. Encontrar los valores siguientes:

- (i) $g'(1/2)$
- (ii) $g'(1/\sqrt{2})$
- (iii) $g(1/2)$
- (iv) $g(1/\sqrt{2})$
- (v) $g'(\sqrt{3}/2)$
- (vi) $g(\sqrt{3}/2)$

(d) Sea $g(x) = \arccos x$. Decir qué representan los valores siguientes: $g'(\frac{1}{2})$, $g'(1/\sqrt{2})$, $g(\frac{1}{2})$.

(e) Sea $\sec x = \frac{1}{\cos x}$. Definir la función inversa de la secante en algún intervalo adecuado y obtener una fórmula para la derivada de esta función inversa.

§4. Arcostangente.

(a) Sea g la función arctan. Decir qué representan los siguientes valores: $g(1)$; $g(1/\sqrt{3})$; $g(-1)$; $g(\sqrt{3})$.

(b) Sea g la función arctan. Decir qué representan los valores: $g'(1)$; $g'(1/\sqrt{3})$; $g'(-1)$; $g'(\sqrt{3})$.

(c) Supongamos que se quiere definir una función inversa de la tangente en el intervalo $\pi/2 < x < 3\pi/2$. ¿Cuál sería la derivada de esta función inversa?

§5. Evaluación de las funciones trigonométricas inversas.

(a) Hallar los siguientes números:

(i) $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} 3\pi/2)$.

(ii) $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} 2\pi)$.

(iii) $\arccos(\cos 3\pi/2)$.

(iv) $\arccos(\cos \pi/2)$.

(v) $\arccos(\cos \pi/2)$.

(vi) $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} -3\pi/4)$.

(vii) $\arctan(0)$.

(b) Decir qué representan los valores:

(i) $\arctan(\tan 3\pi/4)$

(ii) $\arctan(\tan 2\pi)$

(iii) $\arctan(\tan 5\pi/6)$

(iv) $\arctan(\tan -5\pi/6)$

§6. Un poco más de derivación. Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones:

(a) $\arctan 3x$

(b) $\arctan \sqrt{x}$

(c) $\operatorname{arcsen} x + \arccos x$

(d) $x \operatorname{arcsen} x$

(e) $x^2 \arctan 2x$

(f) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{arcsen} x}$

(g) $\operatorname{arcsen}(\cos x - x^2)$

(h) $\arctan \dfrac{1}{x}$

(i) $\arctan \dfrac{1}{2x}$

(j) $\operatorname{arcsen}(x^2 - 1)$

(k) $\arccos(2x + 5)$

(l) $\dfrac{2}{\arccos 2x}$

(m) $\dfrac{1}{\operatorname{arcsen} x}$