

PRÁCTICO 9: OPERADORES AUTOADJUNTOS.

A menos que se indique lo contrario, considerar en \mathbb{R}^n y en \mathbb{C}^n los productos internos usuales, en $\mathbb{R}_n[x]$ el producto interno $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$ y en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ el producto interno $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^t)$.

1. Operadores autoadjuntos

EJERCICIO 1. En un \mathbb{R} -espacio vectorial V de dimensión finita con producto interno, se considera el operador lineal $T : V \rightarrow V$ tal que $T(v) = \langle v, u_0 \rangle u_1$ donde u_0 y u_1 son vectores no nulos (fijos) de V . Hallar T^* . ¿Qué condiciones tienen que cumplir los vectores u_0 y u_1 para que T sea autoadjunto?

EJERCICIO 2. Sean T_1 y T_2 operadores autoadjuntos

- A. Probar que $T_1 + T_2$ es autoadjunto y que αT_1 es autoadjunto $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
- B. Dar un ejemplo que muestre que $T_1 \circ T_2$ no tiene por que ser autoadjunto.
- C. Probar que $T_1 \circ T_2$ es autoadjunto $\Leftrightarrow T_1$ y T_2 conmutan.

2. Representación matricial de operadores autoadjuntos. Matrices simétricas y hermíticas

EJERCICIO 3.

- A. En \mathbb{R}^3 con el producto interno habitual se considera
 - a) el operador lineal T tal que

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

siendo $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$. Probar que T es autoadjunta.

- b) el operador lineal S tal que

$$_{\mathcal{B}}(S)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

siendo $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$. ¿Es S autoadjunta?

- B. En \mathbb{C}^2 con el producto interno habitual se considera el operador lineal T tal que

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1+i & i \\ -2i & 1-i \end{pmatrix}$$

siendo $\mathcal{B} = \{(1, 1), (0, 1)\}$. Probar que T es autoadjunta.

- C. Se considera en \mathbb{R}^3 el producto interno habitual. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineal dada por:

$$T(1, 1, 0) = (5, 8, -1), \quad T(1, -1, 1) = (10, -14, 10), \quad T(2, 1, 1) = (13, a, b)$$

Hallar a y b para que T sea autoadjunta.

3. Teoría Espectral de operadores autoadjuntos.

EJERCICIO 4. En los siguientes casos probar que T es autoadjunto, hallar su forma diagonal y una base ortonormal del espacio formada por vectores propios de T .

- A. $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}z, 2y, \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}z\right)$.
 B. $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}z, -y, -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}z\right)$.

EJERCICIO 5.

- A. Para cada matriz A verificar es simétrica real y hallar una matriz P ortogonal (esto es $P^{-1} = P^t$) tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal

$$(i) A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad (ii) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (iii) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- B. Verificar que $A = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix}$ es una matriz simétrica compleja **no** diagonalizable.

- C. Para cada matriz A verificar que es hermítica y hallar una matriz P unitaria (esto es $P^{-1} = \overline{P}^t$) tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal:

$$(i) A = \begin{pmatrix} 4 & 1-i \\ 1+i & 5 \end{pmatrix} \quad (ii) A = \begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 3 \end{pmatrix} \quad (iii) A = \begin{pmatrix} 6 & 2+2i \\ 2-2i & 4 \end{pmatrix}$$

$$(iv) A = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ -i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 6. Sea $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ simétrica y $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ los valores propios de A .

- A. Probar que $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$ y $det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$
 B. (i) Si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ son no nulos y $\lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \dots = \lambda_n = 0$ probar que $rg(A) = r$.
 (ii) Si además A es idempotente (esto es $A^2 = A$) demostrar que $rg(A) = tr(A)$.

EJERCICIO 7. Sea $A \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica. Se sabe que λ y μ son valores propios distintos de A , con $mg(\lambda) = mg(\mu) = 2$. Además se sabe que los vectores $(1, 1, 0, 0)$ y $(1, 1, 1, 1)$ pertenecen a S_λ (subespacio propio asociado a λ). Entonces una base de S_μ (subespacio propio asociado a μ) es:

- A. $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0, 0), (0, 1, -1, 0)\}$.
 B. $\mathcal{B} = \{(0, 1, -1, 0), (0, 0, 1, -1)\}$.
 C. $\mathcal{B} = \{(0, 0, 1, -1), (-1, 0, 0, 1)\}$.
 D. $\mathcal{B} = \{(-1, 0, 0, 1), (1, -1, 0, 0)\}$.
 E. $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1)\}$.

EJERCICIO 8. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno. Sea S un subespacio de V y $T : V \rightarrow V$ un operador lineal. Probar que si T es autoadjunto y S es invariante por T entonces existe una base ortonormal de S formada por vectores propios de T .

EJERCICIO 9. [2do parcial curso 2005] En \mathbb{R}^3 con el producto interno usual consideramos la base $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ tal que $\langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_1, u_3 \rangle = 0$, $\langle u_2, u_3 \rangle = \frac{1}{2}$ y los operadores T y S definidos por

$${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad y \quad {}_{\mathcal{B}}(S)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Estudiar si T y S son operadores autoadjuntos.

EJERCICIO 10. [Examen Diciembre 2005] En \mathbb{R}^3 con el producto interno usual consideramos el operador autoadjunto $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

- $T(x, y, z) = 4(x, y, z)$ para todo $(x, y, z) \in U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 2z = 0\}$.
- $\det(T) = -48$.

Calcular $T(3, 0, 2)$.

EJERCICIO 11. Se consideran los operadores lineales $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ y $S : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tales que

$$c(T)c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad c(S)c = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

siendo \mathcal{C} la base canónica de \mathbb{R}^4 .

Hallar una base \mathbb{R}^4 formada por vectores propios de ambos operadores.

EJERCICIO 12.

- A. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y \mathcal{B} una base de V cualquiera. Probar que existe un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en V para el cual \mathcal{B} es ortonormal.
- B. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre \mathbb{R} y $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Probar que T es diagonalizable si, y sólo si, existe un producto interno en V para el cual T es autoadjunta.
- C. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre \mathbb{R} y $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal diagonalizable. Si $S \subset V$ es un subespacio invariante bajo $T \Rightarrow S$ tiene una base formada por vectores propios de T .