1.1 - Introducción

El movimiento ondulatorio aparece en casi todos los campos de la física:

- Ondas producidas por el viento o algún otro tipo de perturbación sobre la superficie del agua;
- Oimos un foco sonoro por medio de las ondas (ondas sonoras) que se propagan por el aire o cualquier otro medio material. Las vibraciones del propio foco (cuerda de una guitarra,...) puede constituir una onda llamada estacionaria;
- Muchas de las propiedades de la luz se explican a través de la teoría ondulatoria, sabiéndose que las ondas luminosas tienen idéntica naturaleza a las ondas de radio, las microondas, las radiaciones infrarrojas y UV y los rayos X (ondas electromagnéticas);
- También conocemos los devastadores efectos de los terremotos producidos por las ondas sísmicas.

En este tema se tratarán principalmente las ondas que necesitan de un medio material deformable o elástico para propagarse (ondas mecánicas). Las ondas que se producen en la superficie del agua, las que se propagan por una cuerda y por un muelle, así como las ondas sonoras, son mecánicas. Sin embargo, las ondas luminosas no son mecánicas.

Como en el caso de las oscilaciones, el movimiento ondulatorio se presenta en un sistema con un estado de equilibrio. La onda es una perturbación que aparta al sistema de su posición de equilibrio.

A diferencia de las oscilaciones, una onda implica el movimiento en numerosos puntos distintos de un sistema. Estos movimientos están acoplados de forma que una perturbación original se transmite a las porciones de materia vecinas y de estas a las siguientes propagándose de este modo por el medio.

No todos los puntos del medio son alcanzados al mismo tiempo por la perturbación, ya que ésta se propaga con una cierta velocidad (velocidad de la onda), de forma que las partículas más alejadas del origen de la perturbación comenzarán a moverse con un cierto retraso.

El medio mismo no se mueve en su conjunto al progresar la onda. Las partículas del medio realizan movimientos limitados alrededor de sus posiciones de equilibrio. Por tanto, no hay transporte de materia en el movimiento ondulatorio.

Para poder poner en movimiento estos medios en los que se propagan las ondas hay que aportar energía al sistema realizando trabajo mecánico sobre el mismo. La onda transporta esta energía de una región del medio a otra. Por tanto, lo único que se transmite en una onda es energía (incluso a distancias considerables).

1.2 - Tipos de onda

Ya que la perturbación que se propaga en un medio puede ser de naturaleza muy diversa, las ondas pueden denominarse en función del nombre de la magnitud física que se propaga:

- **Ondas de desplazamiento**: ondas en una cuerda, ondas en la superficie del agua;
- **Ondas de presión**: ondas sonoras, etc.;
- **Ondas térmicas**;
- **Ondas electromagnéticas**: luz, microondas, ondas de radio, etc.

Como la magnitud física asociada puede tener carácter escalar o vectorial podemos distinguir entre:

- **Ondas escalares**, por ejemplo ondas en una cuerda;
- **Ondas vectoriales**, por ejemplo ondas electromagnéticas.

En función de la relación entre los movimientos de las partículas del medio material respecto a la dirección de propagación de la onda, podemos distinguir entre:

- **Ondas transversales**, si las oscilaciones de las partículas del medio son perpendiculares a la dirección de propagación de la onda (ver Figura 1);
- **Ondas longitudinales**, si las oscilaciones de las partículas del medio se produce en la misma dirección de propagación de la onda. (ver Figura 2).

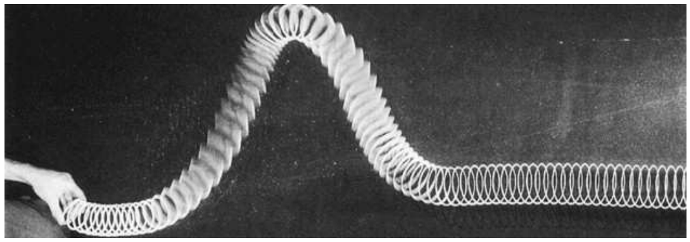


Figura 1 - Onda transversal en un muelle

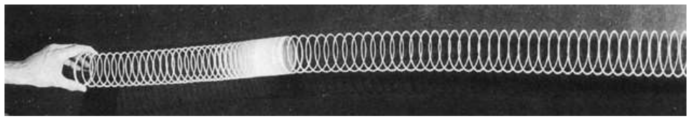


Figura 2 - Onda longitudinal en un muelle

También se pueden clasificar las ondas atendiendo al número de dimensiones espaciales en que se propaga la energía, hablándose de:

- **Ondas unidimensionales**, por ejemplo ondas en una cuerda o tubo sonoro (ver Figura 3);
- **Ondas bidimensionales**, por ejemplo ondas superficiales en el agua (ver Figura 4);
- **Ondas tridimensionales**, por ejemplo ondas sonoras o luminosas que emanan de una fuente de pequeñas dimensiones.

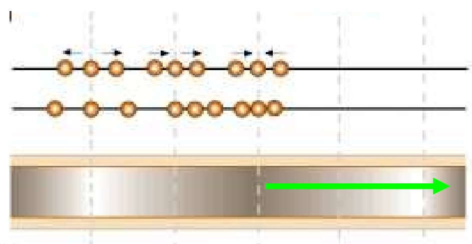


Figura 3 - Onda en un tubo sonoro

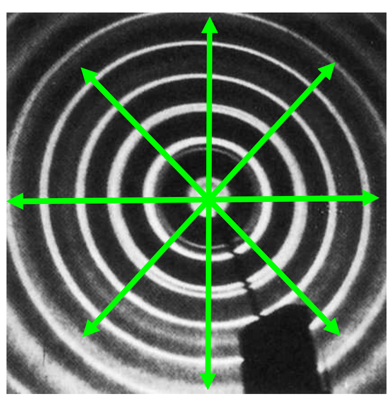


Figura 4 - Onda en la superficie de un líquido

Una onda puede consistir también en la propagación de:

- **Un solo pulso** (pulso de onda) que se caracteriza por tener un principio y un fin y por tanto una extensión limitada (ver Figura 5); las partículas del medio se mueven sólo durante el intervalo de tiempo que emplea el pulso en pasar por ella. La forma del pulso puede variar conforme la onda se propaga ensanchándose (dispersión de la onda), aunque en muchos casos prácticos esta deformación es despreciable, conservándose la forma del pulso.

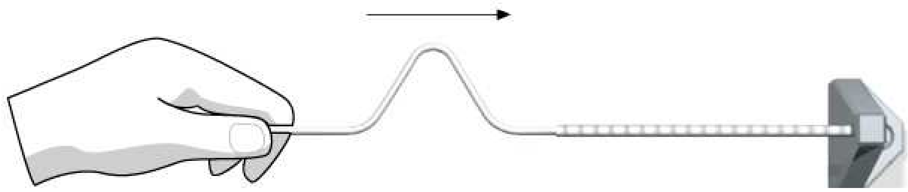


Figura 5 - Un pulso de onda en una cuerda

- **Una sucesión de pulsos** (tren de ondas), idénticos o no. Si las perturbaciones son periódicas se tendrá un tren de ondas periódicas, cuyo caso más simple e importante es el de las ondas armónicas en que cada partícula del medio se mueve con un MAS (ver Figura 6). Idealmente, una onda periódica no tiene principio ni fin y por tanto una extensión ilimitada. A diferencia del pulso no se dispersa cuando se propaga.

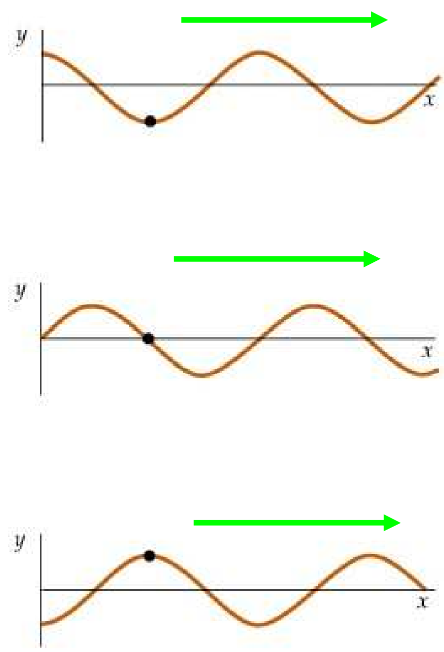


Figura 6 - Sucesión de pulsos - Onda armónica en una cuerda

1.3 - Frentes de onda

Se denomina superficie o frente de onda al lugar geométrico determinado por los puntos del medio que son alcanzados simultáneamente por la onda y que en consecuencia en cualquier instante dado están en el mismo estado o fase de la perturbación (ver Figura 7).

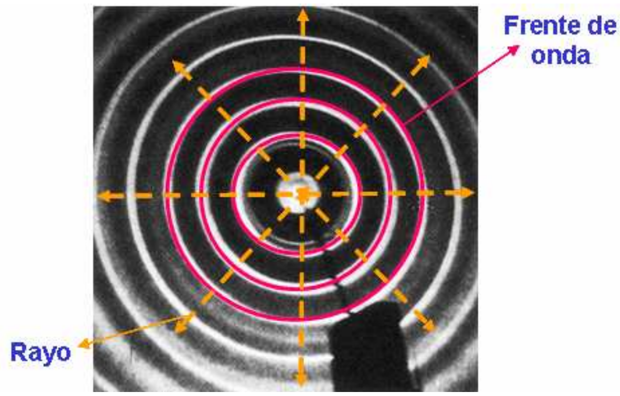


Figura 7 - Frente de onda en la superficie de un líquido

La dirección de propagación de la perturbación es perpendicular al frente de onda. Una línea perpendicular a los frentes de onda, que indica la dirección y sentido de propagación de la perturbación, se denomina *rayo*.

Los frentes de onda pueden tener formas muy diversas:

- **Onda Plana**: las ondas se propagan en una sola dirección; los frentes de onda son planos paralelos y la perturbación se denomina como una onda plana (Figura 11(a));
- **Onda Esférica**: si el lugar donde se genera la onda es un foco puntual y la perturbación se propaga con la misma velocidad en todas las direcciones, la perturbación llegará simultáneamente a puntos equidistantes del foco, siendo los frentes de onda esferas, denominándose a la perturbación como onda esférica. La velocidad de la onda depende de las propiedades del medio en que se propaga, y si esta es igual en todas las direcciones al medio, se le denomina *medio isótropo* (mismas propiedades en cualquier dirección) (Figura 11(b));
- **Onda Cilíndrica**: si la fuente de la onda está distribuida sobre un eje o línea recta, y el medio es isótropo, los frentes de onda serán superficies cilíndricas y a la perturbación se le denomina como una onda cilíndrica (Figura 11(c)).

- **Ondas Circulares:** son ondas bidimensionales que se propagan sobre una superficie, en la que se produce una perturbación en un punto que da lugar a frentes de onda circulares.

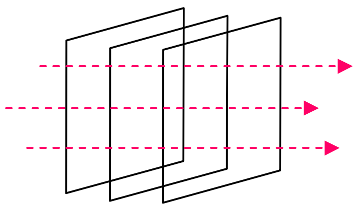


Figura 8(a)

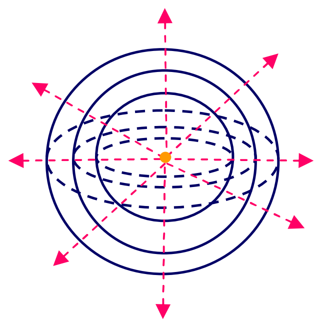


Figura 9(b)

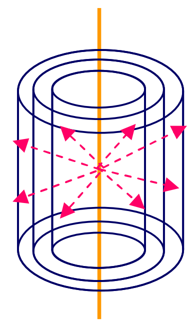


Figura 10(c)

Figura 11 - Frentes de Onda

1.4 - Descripción del movimiento ondulatorio unidimensional.

Sea una función (que podría representar a cualquier magnitud física),

[1] $$\xi = f(x)$$

Si se sustituye ***x*** por ***x-x₀*** en [1] se obtiene la función

[2] $$\xi = f(x - x_0)$$

que tendría la misma forma que la función original, pero aparecería desplazada hacia la derecha una cantidad $\boldsymbol{x_0}$. De la misma forma la función [3] corresponde a la función original desplazada hacia la izquierda una cantidad $\boldsymbol{x_0}$. Ver Figura 12.

[3] $$\xi = f(x + x_0)$$

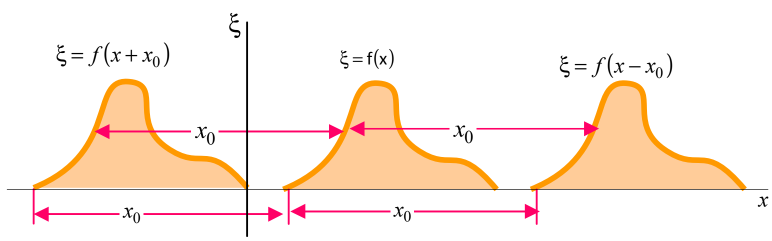


Figura 12 - Onda original y desplazada hacia la derecha y hacia la izquierda

Ahora bien, si se tiene que $\boldsymbol{x_0}$ varía con el tiempo y es igual a

[4] $$x_0 = v \cdot t$$

se obtiene

[5] $$\xi = f(x - v \cdot t)$$

que representa a una curva viajera que se mueve hacia la derecha con velocidad ***v***, llamada velocidad de fase.

Del mismo modo, la ecuación [6] representa a una curva viajera que se mueve hacia la izquierda con velocidad ***v***. Ver Figura 13.

[6] $$\xi = f(x + v \cdot t)$$

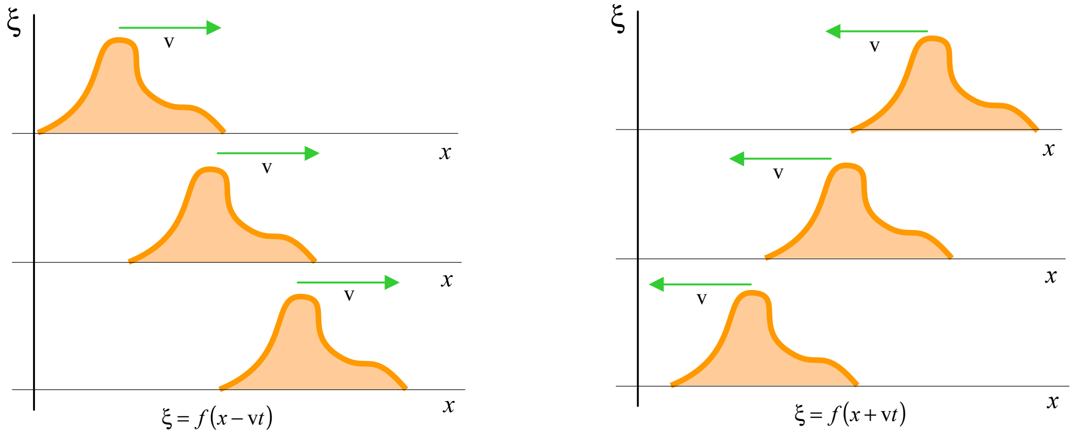


Figura 13 - Curvas viajeras desplazándose a una velocidad *v*

Por tanto una expresión matemática (ecuación [7]) resulta adecuada para describir una magnitud física (deformación de una cuerda, presión de un gas, campo eléctrico o magnético, etc.) que viaja o se propaga sin sufrir deformación a lo largo del eje *x*, esto es a una onda unidimensional.

[7] $$\xi(x,t) = f(x \pm vt)$$

Un caso particular especialmente interesante es el de una onda armónica o senoidal (ecuación [8])

[8] $$\xi(x,t) = \xi_0 \cdot \mathrm{sen}[k \cdot (x - v \cdot t)] \quad \text{donde} \begin{cases} \xi_0 : & \text{Amplitud de Onda} \\ k \cdot (x - v \cdot t) : & \text{Fase de Onda} \\ v : & \text{Velocidad de Onda} \\ k : & \text{Número de Onda} \end{cases}$$

Sustituyendo en la onda armónica el valor de ***x*** por ***x+2π/k*** en [8] se vuelve a obtener el mismo valor de la onda armónica:

[9] $$\xi\left(x + \frac{2\pi}{k}, t\right) = \xi_0 \cdot \mathrm{sen}\left[k \cdot \left(x + \frac{2 \cdot \pi}{k} - v \cdot t\right)\right] = \xi_0 \cdot \mathrm{sen}[k \cdot (x - v \cdot t) + 2\pi] = \xi_0 \cdot \mathrm{sen}[k \cdot (x - v \cdot t)]$$
$$\xi\left(x + \frac{2\pi}{k}, t\right) = \xi(x,t)$$

Entonces la magnitud

[10] $$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

es el ***periodo espacial*** que también se denomina como ***longitud de onda***.

Entonces el número de onda está relacionado con la longitud de onda a través de la ecuación [11]

[11] $$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

y la onda armónica puede expresarse según la ecuación [12]:

[12] $$\xi(x,t)=\xi_0\cdot\text{sen}[k\cdot(x-v\cdot t)]=\xi_0\cdot\text{sen}\left[\frac{2\cdot\pi}{\lambda}(x-v\cdot t)\right]$$

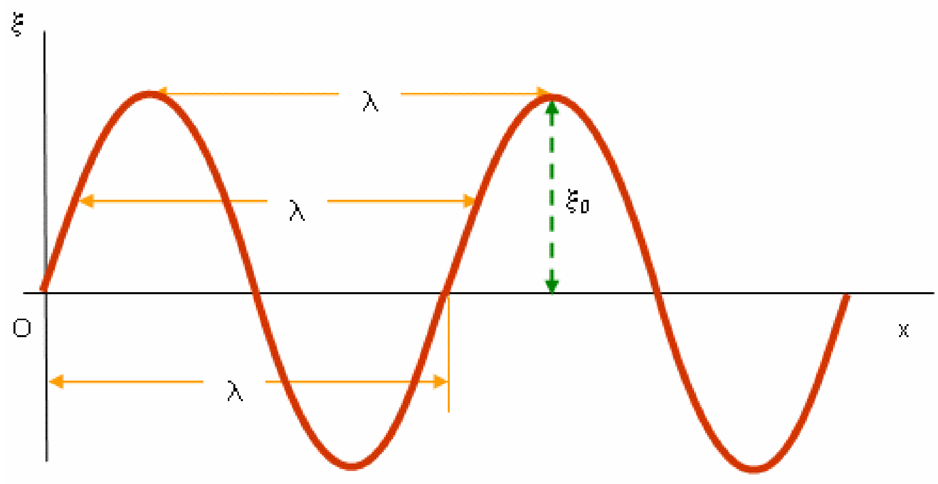


Figura 14 - Representación gráfica de los parámetros característicos de una onda

La ecuación de la onda armónica también puede escribirse como

[13] $$\xi(x,t)=\xi_0\cdot\text{sen}(k\cdot x-\omega\cdot t)$$

donde la frecuencia la frecuencia angular se expresa como:

[14] $$\omega=k\cdot v=\frac{2\cdot\pi\cdot v}{\lambda}$$

Como además hemos visto que

[15] $$\omega=\frac{2\cdot\pi}{P}=2\cdot\pi\cdot\nu \qquad \begin{cases}P:\text{Período}\\ \nu:\text{Frecuencia}\end{cases}$$

reemplazando [14] y [15] en [13], la onda armónica puede también expresarse como

[16] $$\xi(x,t)=\xi_0\cdot\text{sen}\left[2\cdot\pi\cdot\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{P}\right)\right]$$

El periodo y la longitud de onda están relacionados a través de

[17] $$v=\frac{\lambda}{P}\quad\Rightarrow\quad\lambda=v\cdot P$$

En otras palabras, la longitud de onda es la distancia que recorre la onda en un período.

En resumen, una onda armónica puede expresarse de las siguientes formas

[18] $$\xi(x,t)=\xi_0\cdot\text{sen}[k\cdot(x\pm v\cdot t)]=\xi_0\cdot\text{sen}(k\cdot x\pm\omega\cdot t)=\xi_0\cdot\text{sen}\left[2\cdot\pi\cdot\left(\frac{x}{\lambda}\pm\frac{t}{P}\right)\right]$$

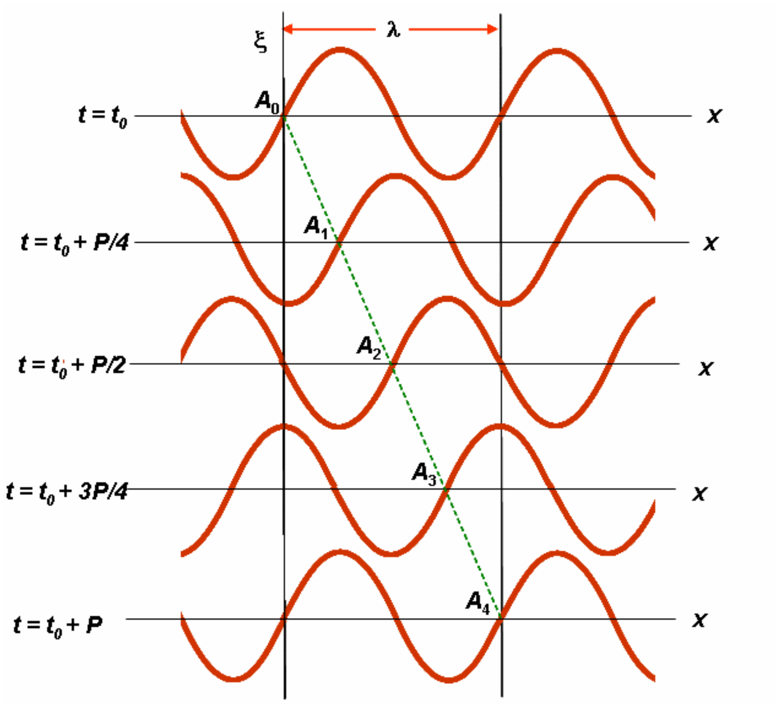


Figura 15 - Traslación de una onda a lo largo de un período P

1.5 - Ecuación general del movimiento ondulatorio unidimensional

La *ecuación general* que describe el movimiento ondulatorio que se propaga con una *velocidad definida **v*** y sin distorsión a lo largo del eje ***+x*** o ***–x*** es

[19] $$\frac{d^2\xi}{dt^2} = v^2 \cdot \frac{d^2\xi}{dx^2}$$

Las posibles soluciones a la ecuación [19] son

[20] $$\xi(x,t) = f(x - v \cdot t) \qquad \xi(x,t) = f(x + v \cdot t) \qquad \xi(x,t) = f_1(x - v \cdot t) + f_2(x - v \cdot t)$$

Es fácil demostrar que una onda armónica del siguiente tipo

[21] $$\xi(x,t) = \xi_0 \cdot \text{sen}[k \cdot (x - v \cdot t)]$$

satisface la ecuación de onda.

Derivando [21] dos veces respecto a ***x*** y a ***t*** se obtiene

[22] $$\frac{d\xi}{dx} = k \cdot \xi_0 \cdot \cos[k \cdot (x - v \cdot t)] \qquad \frac{d^2\xi}{dx^2} = -k^2 \cdot \xi_0 \cdot \text{sen}[k \cdot (x - v \cdot t)]$$
$$\frac{d\xi}{dt} = -k \cdot v \cdot \xi_0 \cdot \cos[k \cdot (x - v \cdot t)] \qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = -k^2 \cdot v^2 \cdot \xi_0 \cdot \text{sen}[k \cdot (x - v \cdot t)]$$

Igualando las ecuaciones [22], se verifica que [23] cumple con la ecuación general [19].

[23] $$\frac{d^2\xi}{dt^2} = v^2 \cdot \frac{d^2\xi}{dx^2} = -k^2 \cdot \frac{d^2\xi}{dx^2}$$

1.6 - Ondas elásticas

Ondas elásticas longitudinales en una varilla

Cuando se produce una perturbación en el extremo de una varilla (por ejemplo, golpeándola con un martillo), la perturbación se propaga a lo largo de la misma, llegando finalmente al extremo. Se dice que a lo largo de la varilla se ha propagado una onda con una velocidad determinada por las propiedades del medio (es decir, el material de la varilla).

Sea una varilla de sección ***A*** sujeta por un extremo y sometida a una fuerza normal ***F*** a lo largo del eje. La tensión normal se define como

[24] $$\sigma_n = F/A$$

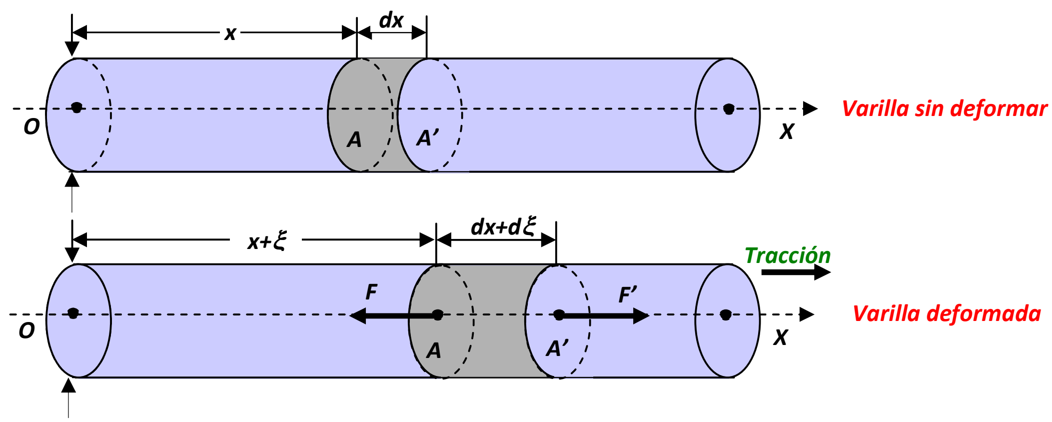


Figura 16 - Deformación en una varilla sometida a una fuerza normal

Si ξ representa la deformación que sufre la varilla sometida a la tracción, la *deformación unitaria* de un trozo de longitud ***dx*** y limitada por las secciones ***A*** y ***A'*** cuando se somete a esta tensión normal será

[25] $$\varepsilon = d\xi/dx$$

La tensión normal y la deformación unitaria están relacionadas a través de

[26] $$\sigma_n = Y \cdot \varepsilon$$

donde ***Y*** es el Módulo de Young.

De [24], [25] y [26] se obtiene:

[27] $$F = Y \cdot A \cdot \frac{d\xi}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dF}{dx} = Y \cdot A \cdot \frac{d^2\xi}{dx^2}$$

Por otro lado, aplicando la segunda ley de Newton *dF=dm·a* (da = 0) al mismo trozo de varilla se tiene:

[28] $$dF = (\rho \cdot A \cdot dx) \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2} \qquad \text{donde} \begin{cases} dF = F' - F & \text{Fuerza neta que actúa sobre la varilla} \\ dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot A \cdot dx & \text{Masa del trozo de varilla} \\ a = \dfrac{d^2\xi}{dt^2} & \text{Aceleración del trozo de varilla} \end{cases}$$

Despejando [28] se obtiene

[29] $$\frac{dF}{dx} = \rho \cdot A \cdot \frac{d^2\xi}{dt^2}$$

Reemplazando [27] en [30], resulta la relación [30], que es la ecuación básica de una onda unidimensional que se propaga con una velocidad ***v***, expresada en la ecuación [31], que depende de las propiedades del medio.

[30] $$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{Y}{\rho} \cdot \frac{d^2\xi}{dx^2}$$

[31] $$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

Ondas de presión en un gas

Las variaciones de presión en un gas producen ondas elásticas longitudinales que consisten en expansiones y compresiones que se propagan a lo largo del gas (sonido)

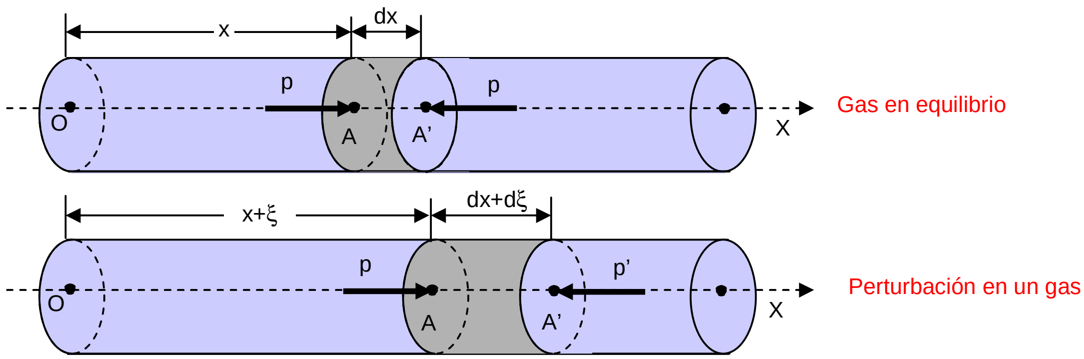


Figura 17 - Ondas elásticas longitudinales en un gas

La situación es parecida al caso anterior, pero ahora las expansiones y compresiones del gas producidas por cambios de presión ***dp*** dan lugar a cambios de densidad ***dρ***, y se define la magnitud ***κ***, llamada *Módulo Volumétrico de Elasticidad*, expresado en la ecuación [32].

[32] $$\kappa = \rho \cdot \frac{dp}{d\rho}$$

En este caso, el desplazamiento del gas ξ satisface la ecuación de onda con una velocidad de propagación

[33] $$v = \sqrt{\frac{\kappa}{\rho}}$$

Ondas elásticas transversales en una varilla

Cuando se produce una perturbación en el extremo de una varilla golpeándola transversalmente, también se produce una perturbación que se propaga a lo largo de la varilla con una velocidad determinada por las propiedades del medio.

En este caso, las fuerzas son tangenciales definiéndose la tensión tangencial como

[34] $$\sigma_t = F/A$$

La deformación unitaria que sufre un trozo de varilla de longitud ***dx*** al someterse a esta tensión tangencial es

[35] $$\varepsilon = d\xi/dx$$

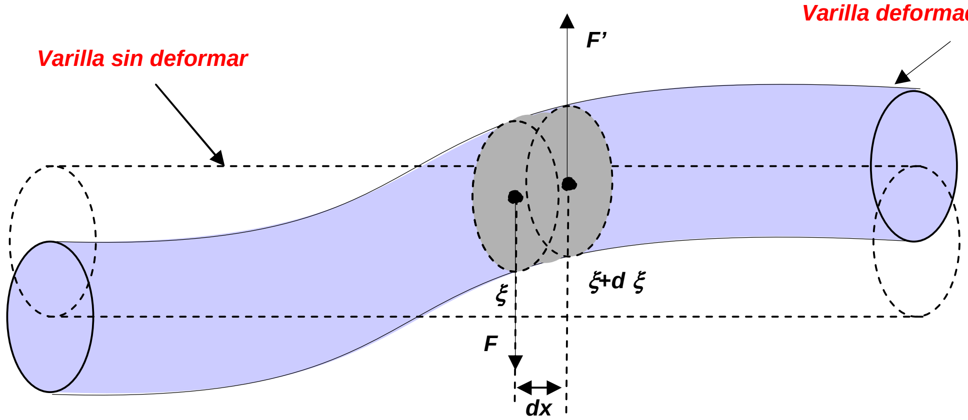


Figura 18 - Ondas transversales en una varilla rígida

La tensión tangencial y la deformación unitaria están relacionadas a través de

[36] $$\sigma_t = G \cdot \varepsilon$$

donde G es el módulo de rigidez o cizalladura.

Procediendo de igual modo que para las ondas elásticas longitudinales en una varilla, se llega a una ecuación de onda similar para las perturbaciones transversales, propagándose éstas con una velocidad expresada en la ecuación [37], que depende de las propiedades del medio.

[37] $$v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

1.7 - Descripción del movimiento ondulatorio en una dirección arbitraria.

Hemos visto que la expresión para representar a un movimiento ondulatorio que se propaga según el eje x (onda plana o unidimensional) es

[38] $$\xi = f(x - v \cdot t)$$

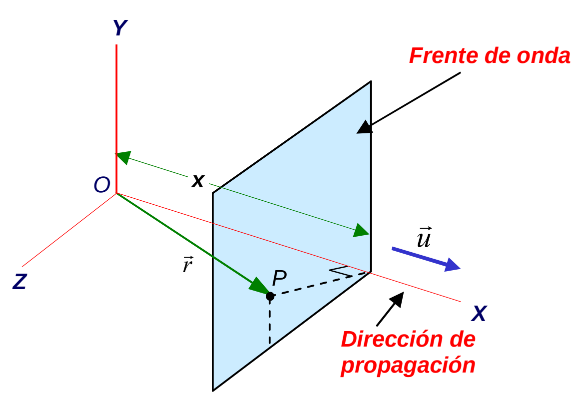


Figura 19 - Propagación arbitraria de una onda. $\vec{r}$: vector posición de un punto cualquiera del frente de onda; $\vec{u}$: vector unitario en la dirección de propagación.

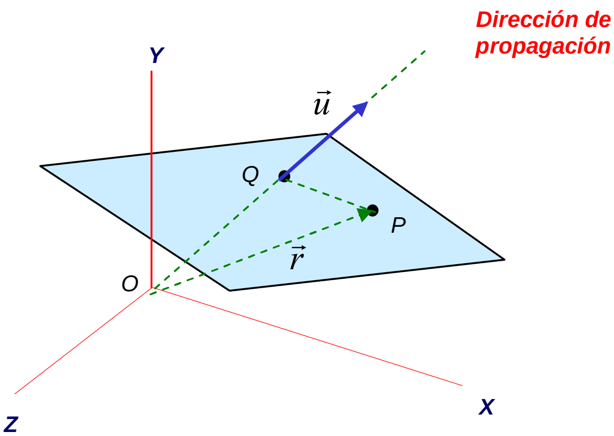
De la figura, se observa que

[39] $$x = \vec{r} \cdot \vec{u}$$

Reemplazando [38] en [39], resulta que la onda unidimensional anterior puede expresarse como

[40] $$\xi = f(\vec{u} \cdot \vec{r} - v \cdot t)$$

Esta última expresión es bastante útil porque representa a una onda unidimensional que se propaga en una dirección arbitraria (no solo a lo largo del eje X)



En el caso de una onda plana armónica o senoidal que se propaga en una dirección arbitraria, escribimos

[41] $$\xi(x,t) = \xi_0 \cdot \mathrm{sen}[k(\vec{u} \cdot \vec{r} - v \cdot t)] = \xi_0 \cdot \mathrm{sen}(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega \cdot t)$$

Donde $\vec{k} = k \cdot \vec{u}$ es el vector de propagación o vector número de onda.

Para una onda plana que se propaga en una dirección arbitraria, la ecuación de onda [19] se convierte en

[42] $$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right)$$

Un tipo de ondas importantes que se propagan en todas las direcciones del espacio son las ondas esféricas. En éstas, la perturbación de la magnitud física que se propaga será una función de la distancia a la que se encuentra del foco donde se generó la onda, r, y el tiempo, t.

[43] $$\xi = \xi(r,t)$$

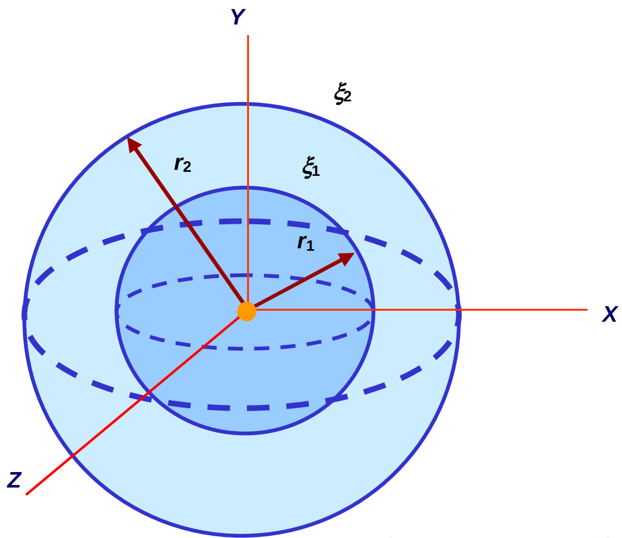


Figura 20 - Esquema de la propagación de una onda esférica

La ecuación básica de una onda esférica es

[44] $$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = v^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} \right)$$

La solución de la ecuación [44] es de la forma de la ecuación [45], donde el signo menos se utiliza cuando la onda se aleja del foco puntual.

[45] $$\xi(r,t) = \frac{1}{r} f(r \pm v \cdot t)$$

De este modo, la expresión de una onda armónica esférica está dada por la ecuación [46]:

[46] $$\xi(x,t) = \frac{\xi_0}{r} \operatorname{sen}[k(r - v \cdot t)] = \frac{\xi_0}{r} \operatorname{sen}(k \cdot r - \omega \cdot t)$$

1.8 - Energía transportada por una onda. Intensidad.

Se ha indicado en la introducción que una característica importante del movimiento ondulatorio es que transporta energía (pero no materia). En este apartado se tratará de caracterizar este transporte de energía.

Supóngase el caso de una onda armónica que se propaga por una cuerda. Cada trozo de cuerda de masa Δm por la que pasa la onda oscila con un MAS.

Su energía será por tanto

[47] $$\Delta E = \frac{1}{2} \Delta m \cdot \omega^2 \cdot \xi_0^2 = \frac{1}{2} \mu \cdot \Delta x \cdot \omega^2 \cdot \xi_0^2$$

donde $\Delta m = \mu \cdot \Delta x$, μ es la densidad lineal [M/L], y Δx es la longitud de un trozo de cuerda.

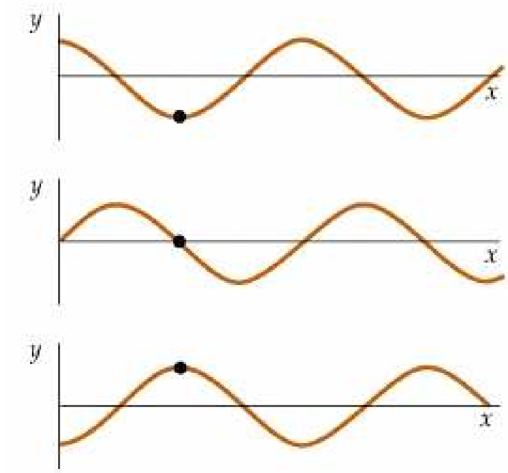


Figura 21 - Onda armónica en un cuerda

Se define la densidad de energía ρ_E como la energía por unidad de volumen:

- En una cuerda, ***densidad lineal***:

[48] $$\rho_E = \frac{\Delta E}{\Delta S} = \frac{1}{2}\sigma \cdot \omega^2 \cdot \xi_0^2$$

- En la superficie de un líquido, ***densidad superficial***:

[49] $$\rho_E = \frac{\Delta E}{\Delta x} = \frac{1}{2}\mu \cdot \omega^2 \cdot \xi_0^2$$

- En la superficie de un líquido, ***densidad volumétrica***:

[50] $$\rho_E = \frac{\Delta E}{\Delta V} = \frac{1}{2}\rho \cdot \omega^2 \cdot \xi_0^2$$

Supóngase la onda armónica que se propaga por la cuerda y que en el instante t_1 ha alcanzado el punto P_1. Durante un intervalo de tiempo Δt la onda recorre una distancia $\Delta x = v \cdot \Delta t$ (ver Figura 22). De esta forma, la energía que ha pasado por P_1 durante el intervalo de tiempo Δt es

[51] $$\Delta E = \frac{1}{2}\mu \cdot \omega^2 \cdot \xi_0^2 \cdot \Delta x = \frac{1}{2}\mu \cdot \omega^2 \cdot \xi_0^2 \cdot v \cdot \Delta t$$

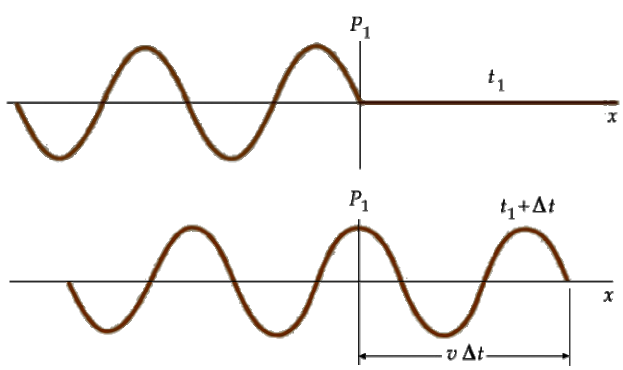


Figura 22 - Propagación de una onda a lo largo de una cuerda

De este modo, se define la potencia P como la energía transmitida en la unidad de tiempo

[52] $$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{1}{2} \mu \cdot \omega^2 \cdot \xi_0^2 \cdot v$$

La intensidad ***I*** es la energía que atraviesa en la unidad de tiempo un área unidad, colocada perpendicularmente a la dirección de propagación de la onda. Por tanto

[53] $$P = I \cdot A$$

donde ***A*** es el área. Igualando [52] y [53], se observa que tanto la potencia como la intensidad son proporcionales al cuadrado de la amplitud.

Ondas esféricas

Sea una onda esférica que se propaga en un medio sin disipación de energía y tomamos dos superficies esféricas situadas a una distancia R_1 y R_2 del foco ($R_1 < R_2$).

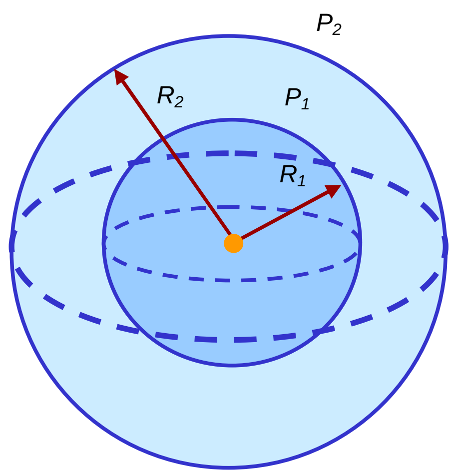


Figura 23 - Parámetros de la propagación de una onda esférica

La potencia transmitida a través de cada superficie es

[54] $$P_1 = I_1 \cdot A_1 = I_1 \cdot 4 \cdot \pi \cdot R_1^2 \quad \text{y} \quad P_2 = I_2 \cdot A_2 = I_2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot R_2^2$$

Como la energía se conserva en este caso ($P_1 = P_2$),

[55] $$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2^2}{R_1^2}$$

Y ya que $R_1 < R_2$ entonces se tiene que $I_1 > I_2$.

Ya que la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud

[56] $$\frac{\xi_{01}^2}{\xi_{02}^2} = \frac{R_2^2}{R_1^2} \qquad \frac{\xi_{01}}{\xi_{02}} = \frac{R_2}{R_1} \qquad \xi_{01} \cdot R_1 = \xi_{02} \cdot R_2$$

Ondas planas

Sea una onda plana que se propaga en un medio en el que no hay disipación de energía. Si tomamos dos superficies planas se verifica que

[57] $$A_1 = A_2 \qquad P_1 = P_2$$

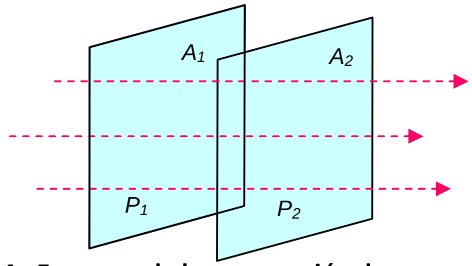


Figura 24 - Esquema de la propagación de una onda plana

Con lo cual se tiene que

[58] $$P_1 = I_1 \cdot A_1 \;,\quad P_2 = I_2 \cdot A \quad \Rightarrow \quad I_1 = I_2 \quad \Rightarrow \quad \xi_{01} = \xi_{02}$$

Absorción

Fenómeno por el que la intensidad de una onda disminuye porque parte de su energía se disipa en el medio en el que se propaga. Para una onda plana que se propaga según el eje x, se verifica la siguiente relación

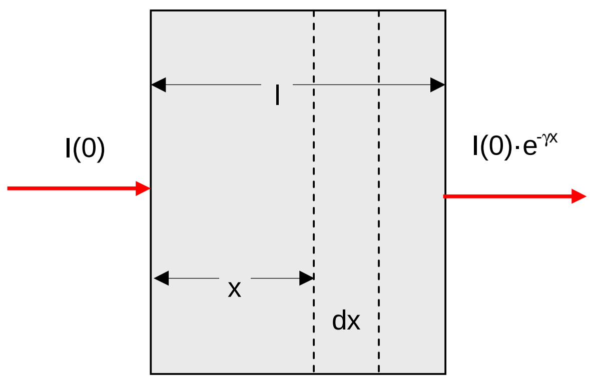


Figura 25 - Intensidad propagada en una onda plana

[59] $$\frac{dI}{I} = -\gamma \cdot dx$$

A partir de la cual se obtiene que

[60] $$\begin{cases} I(x) = I(0) \cdot e^{-\gamma \cdot x} \\ \xi_0(x) = \xi_0(0) \cdot e^{-\frac{\gamma}{2} \cdot x} \end{cases}$$

1.9 - Superposición o interferencia de ondas.

Cuando dos o más ondas coinciden en el tiempo y en el espacio, la función de onda resultante es la suma vectorial de las funciones de onda individuales (Principio de superposición de ondas).

[61] $$\xi_1(x,t) = f_1(x - v \cdot t),\ \xi_2(x,t) = f_2(x + v \cdot t) \quad \Rightarrow \quad \xi(x,t) = \xi_1(x,t) + \xi_2(x,t) = f_1(x - v \cdot t) + f_2(x + v \cdot t)$$

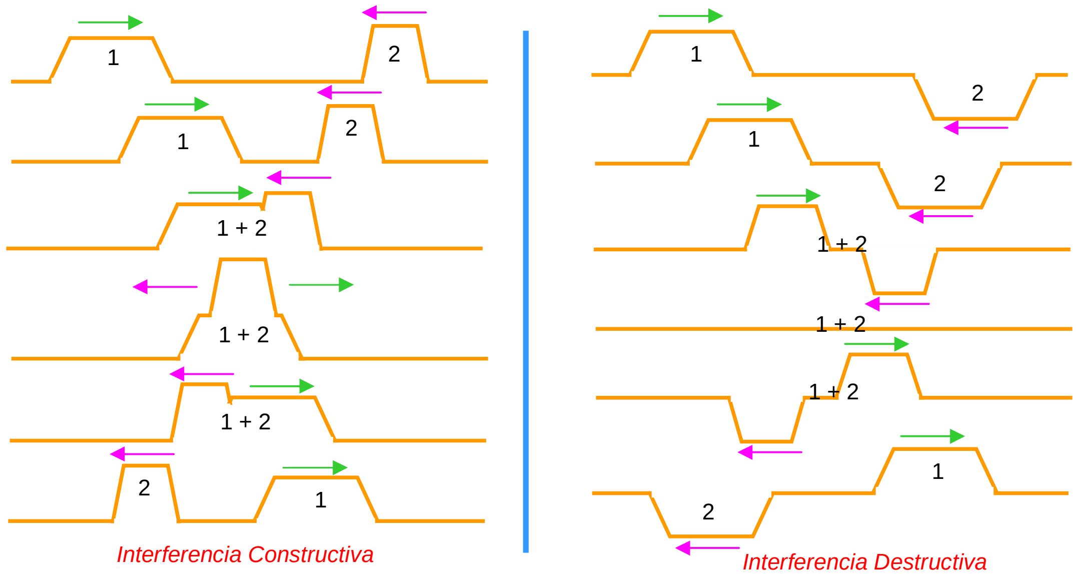


Figura 26 - Esquema de ondas en interferencia

Interferencias de ondas de igual frecuencia.

Supongamos dos fuentes de ondas armónicas S_1 y S_2 que emiten ondas en fase ($\varphi_{01} = \varphi_{02} = 0$), con idéntica frecuencia y número de onda y de amplitudes ξ_{01} y ξ_{02}.

Las expresiones de las dos ondas en un punto P que dista r_1 y r_2 de las fuentes respectivas es

[62] $$\xi_1 = \xi_{01} \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t - k \cdot r_1) \qquad \xi_2 = \xi_{02} \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t - k \cdot r_{2.})$$

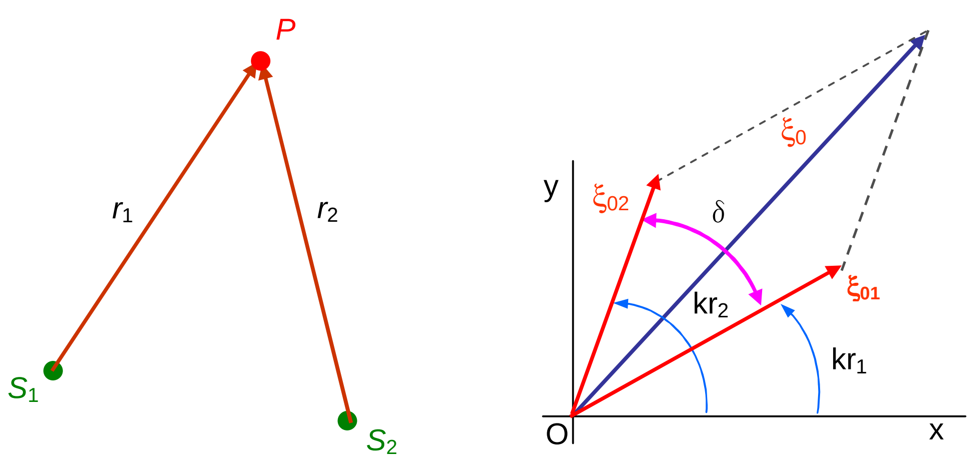


Figura 27 - Dos fuentes emitiendo ondas en fase

La superposición de ambas ondas en P es

[63] $$\xi = \xi_1 + \xi_2 = \xi_{01} \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t - k \cdot r_1) + \xi_{02} \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t - k \cdot r_2)$$

Esto corresponde a la superposición de dos MAS de la misma frecuencia y con una diferencia de fase igual a

[64] $$\delta = (\omega \cdot t - k \cdot r_1) - (\omega \cdot t - k \cdot r_2) = k \cdot r_2 - k \cdot r_1 = k \cdot (r_2 - r_1)$$

con lo que la amplitud del movimiento resultante en P es

[65] $$\xi_0 = \sqrt{\xi_{01} + \xi_{02} + 2 \cdot \xi_{01} \cdot \xi_{02} \cos\left[k \cdot \left(r_2 - r_1\right)\right]}$$

La amplitud es máxima e igual a $\xi_0 = \xi_{01} + \xi_{02}$ cuando

[66] $$\cos\left[k \cdot \left(r_2 - r_1\right)\right] = 1$$

mientras que la amplitud es mínima e igual a $\xi_0 = \xi_{01} - \xi_{02}$ cuando

[67] $$\cos\left[k \cdot \left(r_2 - r_1\right)\right] = -1$$

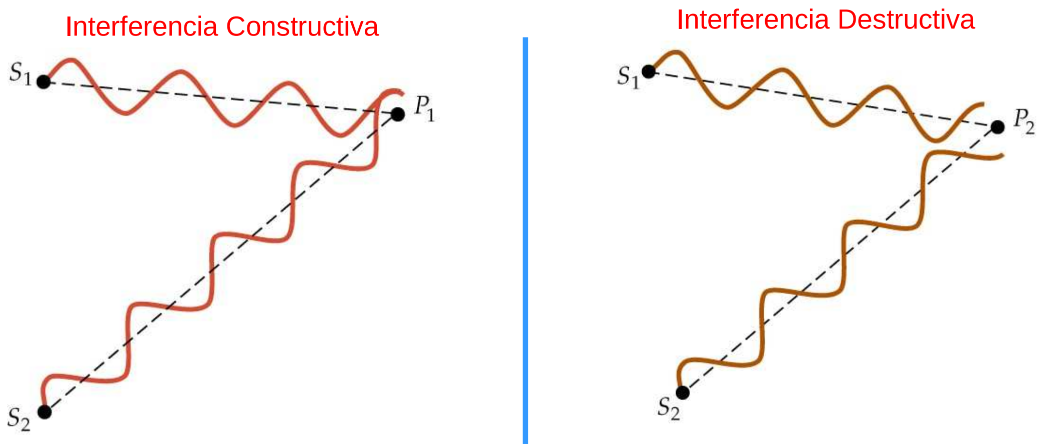


Figura 28 - Esquema de la interferencia de ondas constructiva y destructiva

Como se observa, el valor de la amplitud del movimiento resultante (o el tipo de interferencia) depende de la diferencia $r_2 - r_1$. Además, ya que la ecuación $r_2 - r_1$ = cte corresponde a una hipérbole, se tiene que los lugares donde se producen las interferencias son superficies hiperbólicas tal como se muestra en la Figura 29.

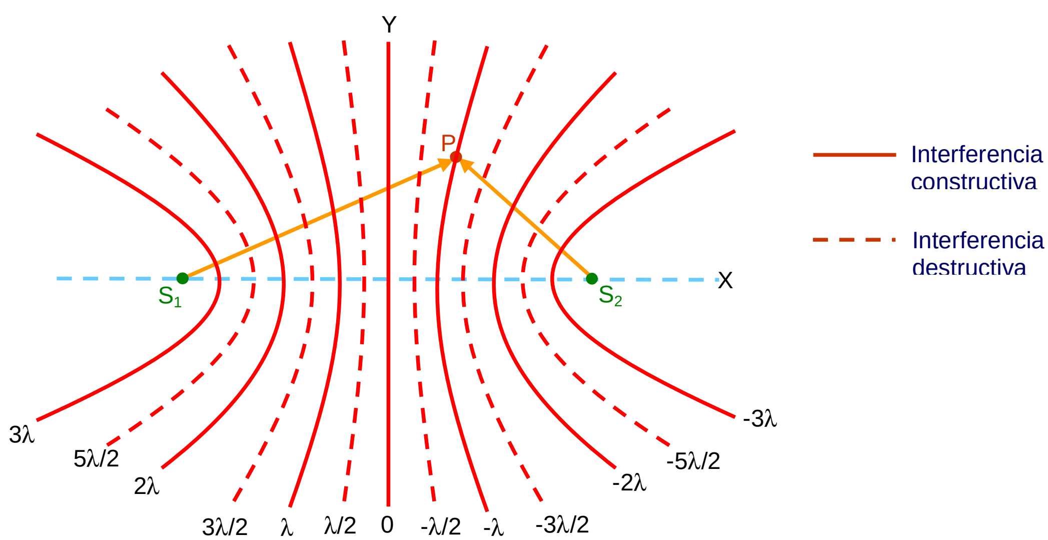


Figura 29 - Interferencia Hiperbólica de Ondas

Ondas estacionarias

Las ondas estacionarias se producen a través de la interferencia de dos ondas idénticas (igual amplitud, frecuencia y número de onda) que se propagan en sentido contrario.

Supongamos que tenemos dos de estas ondas propagándose en el eje ***x*** y que tienen por expresión,

[68] $$\xi_2 = \xi_0 \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x) \qquad \xi_1 = \xi_0 \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t + k \cdot x)$$

La superposición de ambas ondas viene dada por

[69] $$\xi = \xi_1 + \xi_2 = \xi_0 \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t + k \cdot x) + \xi_0 \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x) = \xi_0 \cdot [\mathrm{sen}(\omega \cdot t + k \cdot x) + \mathrm{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x)]$$

Y teniendo en cuenta la siguiente propiedad trigonométrica que establece

[70] $$\mathrm{sen}A + \mathrm{sen}B = 2 \cdot \cos\frac{A-B}{2} \cdot \mathrm{sen}\frac{A+B}{2}$$

se obtiene que

[71] $$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2 \cdot \xi_0 \cdot \cos(k \cdot x)\,\mathrm{sen}(\omega \cdot t)$$

Y, como se observa, la onda estacionaria no es una función dependiente de x±v·t, que es la característica de las ondas viajeras.

Esta expresión indica que cualquier partícula del medio situada en un punto dado x oscila con un MAS de amplitud

[72] **¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.**

La amplitud de la onda estacionaria es por tanto una función de la distancia x.

Adquiere su valor máximo que es igual a

[73] $$\xi_{0r} = 2 \cdot \xi_0 \qquad \text{cuando} \qquad \cos(k \cdot x) = \pm 1\,;$$

y su valor mínimo que es igual a

[74] $$\xi_{0r} = 0 \qquad \text{cuando} \qquad \cos(k \cdot x) = 0\,;$$

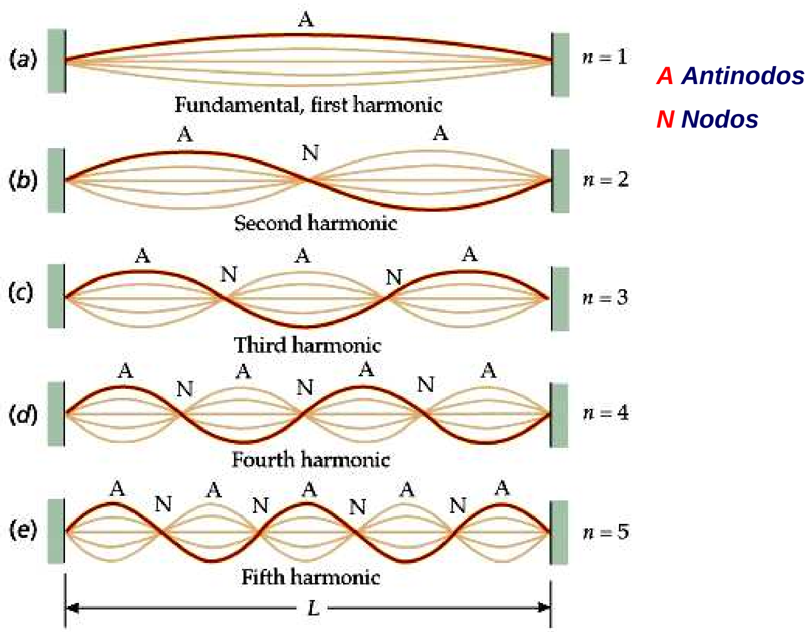


Figura 30 - Esquema de ondas armónicas con nodos y antinodos

La distancia entre dos vientres consecutivos (d_{AA}) o entre dos nodos consecutivos (d_{NN}) es

[75] $$d_{AA} = d_{NN} = \lambda/2$$

y la distancia entre un vientre y un nodo consecutivo (d_{AN}) es

[76] $$d_{AN} = \lambda/4$$

Superposición de ondas de distinta frecuencia. Pulsaciones. Velocidad de grupo.

Supongamos dos ondas armónicas de igual amplitud que se propagan a lo largo del eje $\boldsymbol{x}$, y que tienen frecuencias angulares $\boldsymbol{\omega_1}$ y $\boldsymbol{\omega_2}$ y números de onda $\boldsymbol{k_1}$ y $\boldsymbol{k_2}$ próximos

[77] $$\xi_1 = \xi_0 \cdot \text{sen}(\omega_1 \cdot t - k_1 \cdot x) \qquad \xi_2 = \xi_0 \cdot \text{sen}(\omega_2 \cdot t - k_2 \cdot x)$$

La superposición de ambas ondas viene dada por

[78] $$\xi = \xi_2 + \xi_1 = \xi_0 \cdot \text{sen}(\omega_2 \cdot t - k_2 \cdot x) + \xi_0 \cdot \text{sen}(\omega_1 \cdot t - k_1 \cdot x)$$

Y teniendo en cuenta la propiedad trigonométrica [70], se obtiene que

[79] $$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2 \cdot \cos(\Delta\omega \cdot t - \Delta k \cdot x) \cdot \text{sen}(\omega \cdot t - k \cdot x) \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 & 2 \cdot \Delta k = k_2 - k_1 \\ \omega_m = (\omega_1 - \omega_2)/2 \approx \omega & k_m = (k_1 - k_2)/2 \approx k \end{cases}$$

La amplitud de la onda resultante no es constante y viene dada por la expresión

[80] $$\xi(x,t) = \xi_0 \cdot \cos(\Delta\omega \cdot t - \Delta k \cdot x)$$

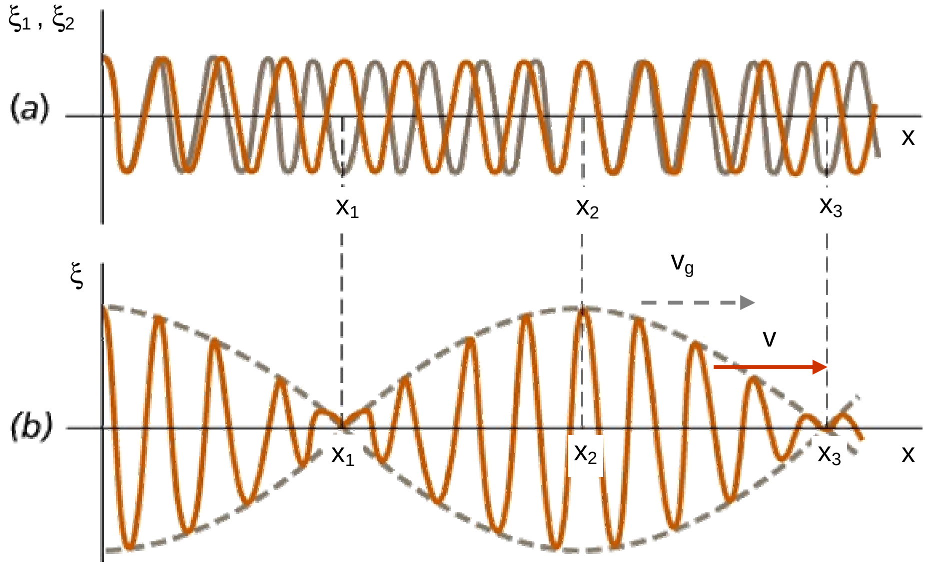


Figura 31 - Onda resultante de la suma de dos ondas de distinta fase

La onda resultante está formada por grupos o paquetes de ondas individuales separados por puntos de amplitud nula.

La envolvente de la amplitud se desplaza a lo largo del eje $\boldsymbol{x}$ con una velocidad llamada velocidad de grupo $\boldsymbol{v_g}$, que viene dada por

[81] $$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

En el límite $\boldsymbol{\omega\Delta \rightarrow d\omega}$ y $\boldsymbol{\Delta k \rightarrow dk}$ la velocidad de grupo viene expresada como

[82] $$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

La velocidad de grupo $\boldsymbol{v_g}$ y la velocidad de fase $\boldsymbol{v}$ ($v = \omega/k$) están relacionadas por

[83] $$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(kv)}{dk} \qquad \Rightarrow \; v_g = v + k\frac{dv}{dk}$$

Si el medio es dispersivo

[84] $$\frac{dv}{dk} \neq 0 \;\Rightarrow\; \qquad v_g \neq v$$

Si el medio es no dispersivo

[85] $$\frac{dv}{dk} = 0 \;\Rightarrow\; \qquad v_g = v$$

1.10 - Difracción de Ondas

Cuando un haz de partículas incide sobre una abertura con un obstáculo, estas partículas son detenidas por la barrera o pasan sin cambiar de dirección.

Sin embargo cuando una onda encuentra un obstáculo tiende a rodearlo. Si una onda encuentra una barrera con una pequeña abertura se extiende alrededor del obstáculo en forma de onda esférica o circular. A este comportamiento se le denomina difracción (ver Figura 33)

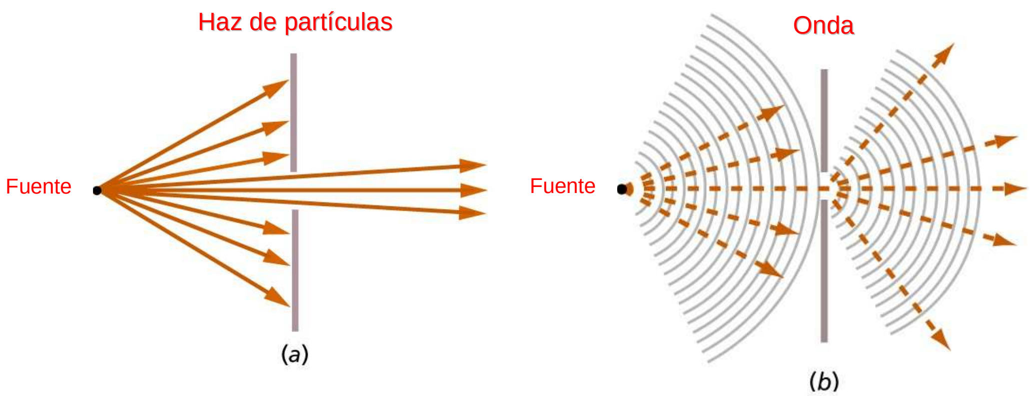


Figura 32 - Difracción de ondas a través de una rendija

La magnitud del fenómeno de la difracción depende de la relación entre la longitud de onda y el tamaño del obstáculo o abertura (ver Figura 33).

Si la longitud de onda es pequeña en relación con la abertura entonces la difracción es pequeña.

En cambio si la longitud de onda tiene las dimensiones de la abertura, los efectos de la difracción son grandes.

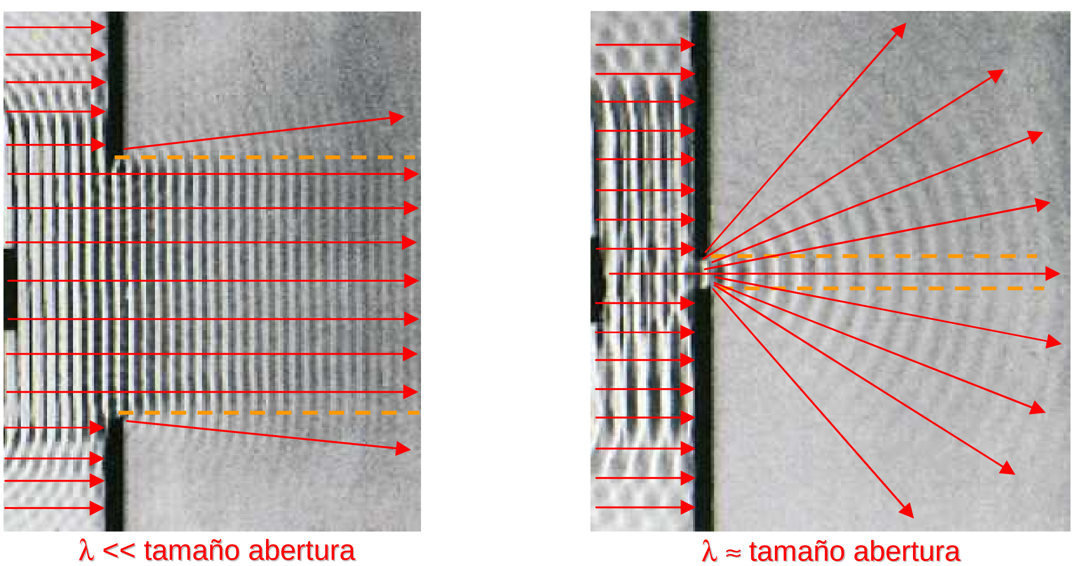


Figura 33 - Difracción de ondas a través de una rendija

1.11 - Reflexión y refracción de ondas.

Cuando una onda incide sobre una superficie límite o de separación de dos regiones en las que la velocidad de onda es diferente, parte de la onda se refleja (propagándose en la misma región que la incidente) y parte se transmite (propagándose en la otra región).

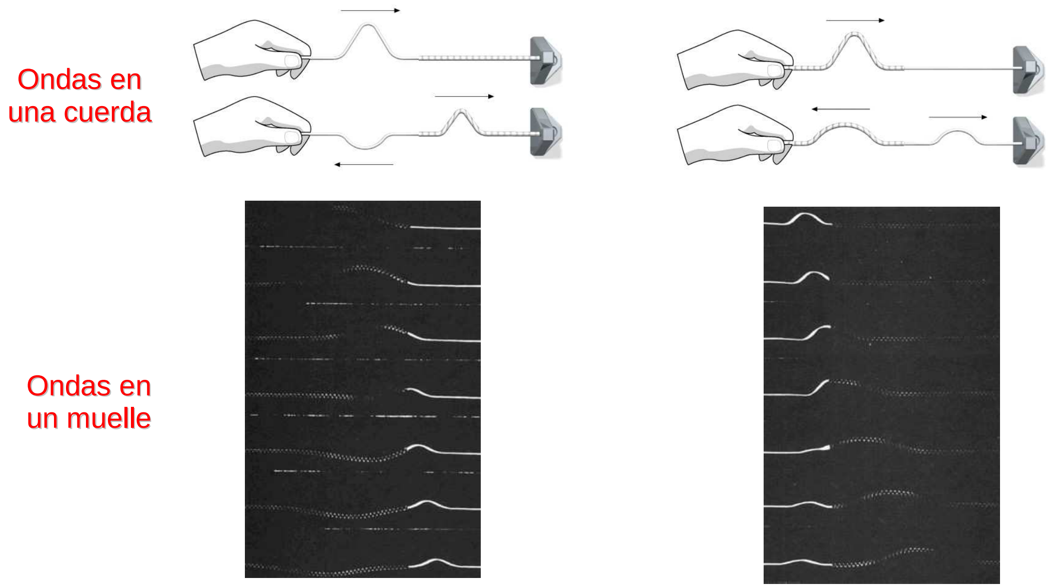


Figura 34 - Refección de ondas

En tres dimensiones, una frontera entre dos regiones de diferente velocidad de onda es una superficie.

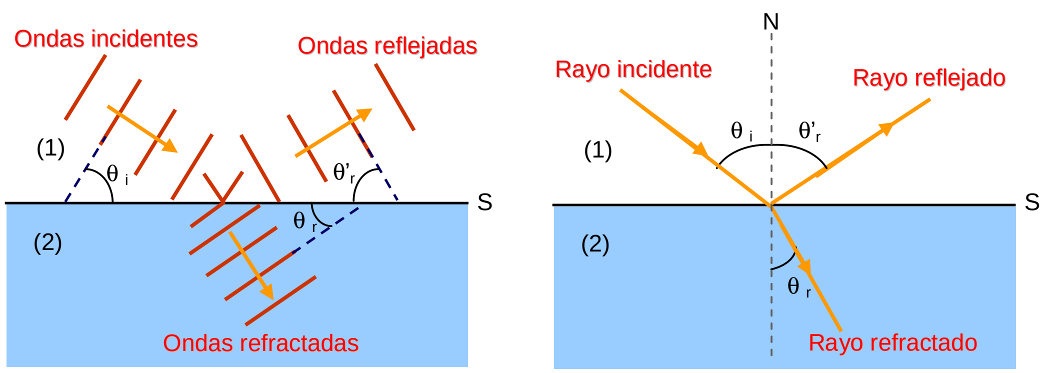


Figura 35 - Ondas reflejadas y refractadas

Se verifican las siguientes leyes comprobadas experimentalmente:

- Las direcciones de incidencia, refracción y reflexión se encuentran en un mismo plano perpendicular a la superficie de separación.
- El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión

[86] $$\theta_i = \theta'_r$$

- La relación entre la dirección en que se propagan las ondas incidentes y las refractadas viene dada a través de la ley de Snell (ecuación [87]) que establece que el cociente entre el seno del ángulo de incidencia y el seno del ángulo de refracción es constante e igual al índice de refracción del medio (2) respecto al medio (1), n_{21}:

[87]
$$\frac{\text{sen}\theta_i}{\text{sen}\theta_r} = \frac{v_1}{v_2} = n_{21}$$

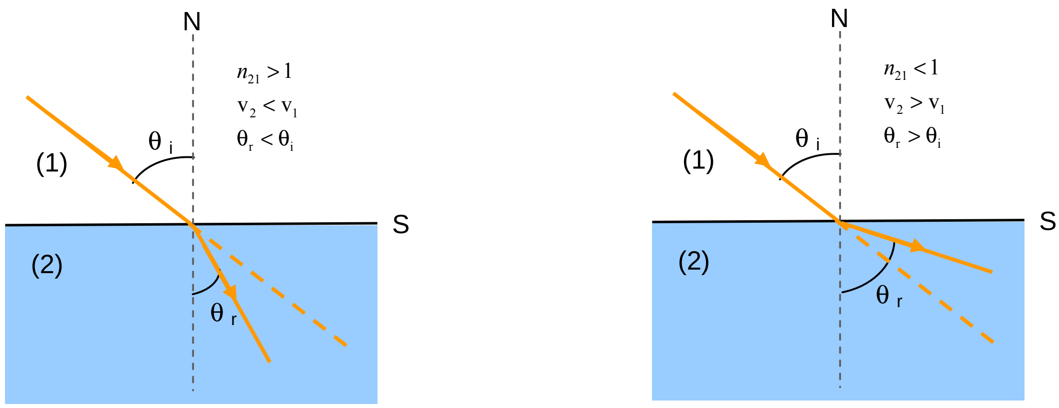


Figura 36 - Ley de Snell

Cuando n_{21}<1 hay un cierto ángulo de incidencia θ_i para el cual el ángulo de refracción θ_r es $\pi/2$. A este ángulo de incidencia se le llama ángulo crítico θ_c. Así si el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo crítico, solo habrá onda reflejada y no refractada.

1.12 - Polarización de Ondas

En las ondas longitudinales la dirección en que la perturbación se produce está bien definida (es la dirección de propagación), mientras que en las ondas transversales no sucede así, ya que la perturbación tiene lugar en un plano perpendicular a la dirección de propagación, pero en ese plano no está definida una dirección particular.

Cuando la perturbación en una onda transversal es según una dirección bien definida la onda se dice que está polarizada. Si la dirección de vibración va variando de forma aleatoria de unos puntos a otros se dice que la onda no está polarizada. En el caso de una onda transversal en una cuerda una simple rendija vertical puede polarizar la onda, tal como se observa en la figura.

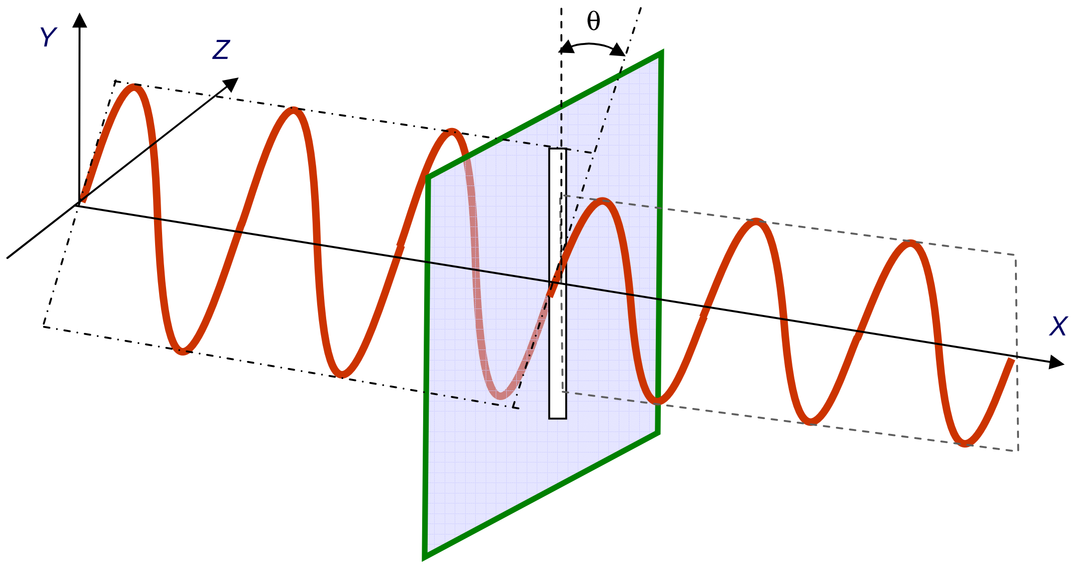


Figura 37 - Onda polarizada

1.13 - Efecto Doppler

Hasta ahora hemos estudiado las ondas tomando tanto el foco emisor de la onda como el observador que la percibe en reposo. En este apartado trataremos lo que sucede cuando existe movimiento relativo entre ambos, y como se verá se produce un cambio en la frecuencia de la onda percibida que se denomina efecto Doppler.

Veamos en primer lugar que es lo que sucede cuando el observador se mueve acercándose hacia el foco que permanece en reposo. Si el observador se encontrara en reposo, el número de ondas que percibe en un tiempo t es

[88] $$\frac{t}{P} = \nu \cdot t = \frac{v \cdot t}{\lambda}$$

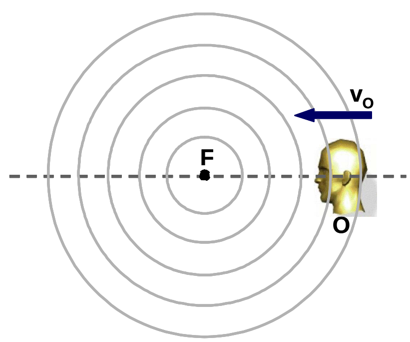


Figura 38 - Efecto Doppler - Observador en Movimiento

Pero si el observador se acerca al foco con velocidad v_0 (Figura 38), el número de ondas que percibe en un tiempo t es,

[89] $$v' = \frac{(v + v_0)}{v/\upsilon} = \frac{(v + v_0)}{v} \cdot \upsilon$$

[90] $$\frac{t}{P'} = \nu' \cdot t = \frac{(v + v_0) \cdot t}{\lambda}$$

Igualmente si el observador se aleja del foco con velocidad v_0, se tiene que,

[91] $$\nu' = \frac{(v - v_0)}{v/\nu} = \frac{(v - v_0)}{v} \cdot \nu$$

Veamos ahora que sucede cuando es la fuente la que se acerca hacia el observador que permanece en reposo (Figura 39).

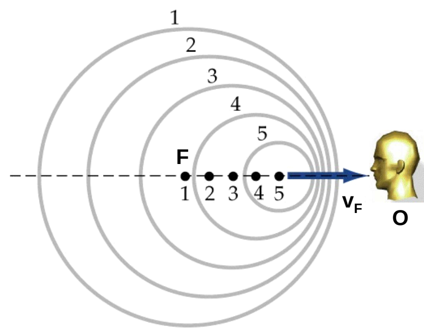


Figura 39 - Efecto Doppler - Fuente en Movimiento

Si la fuente se encontrara en reposo la longitud de onda de las ondas sería

[92] $$\lambda = v \cdot P = \frac{v}{\nu}$$

pero si la fuente que emite las ondas se acerca al observador con velocidad v_F, la longitud de onda es

[93] $$\lambda' = \frac{v - v_F}{\nu}$$

y la frecuencia de la onda percibida por el observador será,

[94] $$\nu' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{v - v_F} \cdot \nu$$

Del mismo modo, si la fuente se aleja del observador con velocidad v_F, se tiene que

[95] $$\nu' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{v + v_F} \cdot \nu$$

Teniendo en cuenta lo anterior, la expresión general que agrupa a todas las situaciones posibles, es de la forma

[96] $$\nu' = \frac{v \pm v_o}{v \mp v_F} \cdot \nu$$

- Numerador
    - (+) Observador se acerca al foco
    - (-) Observador se aleja del foco
- Denominador
    - (-) Foco se acerca al observador
    - (+) Foco se aleja del observador