PRÁCTICO 6: FUNCIONALES LINEALES, ADJUNCIÓN.

Recuerda: Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo (usualmente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), entonces:

- $\mathbb{K}_n[x]$ denota el espacio de polinomios de grado menor $n+1$ con coeficientes en $\mathbb{K}$.
- $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ denota el espacio de matrices con coeficientes en $\mathbb{K}$ de m filas y n columnas.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.
- A menos que se indique lo contrario, considera en $\mathbb{R}^n$ y en $\mathbb{C}^n$ los productos internos usuales, en $\mathbb{R}_n[x]$ el producto interno $\langle p, q\rangle = \displaystyle\int_0^1 p(x)q(x)dx$, y en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ el producto interno $\langle A, B\rangle = tr(AB^t)$.

1. Representación de Riesz

EJERCICIO 1. Hallar el representante de Riesz de los siguientes funcionales lineales:

1. $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $T(x, y, z) = x + 2y - 3z$.
2. $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ dada por $T(x, y, z) = ix + (2 + 3i)y + (1 - 2i)z$.
3. $T : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}$ definida por $T(p) = p(\alpha)$, donde α es un número real fijo.
4. $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ definida por $T(p) = p(0) + p'(1)$.

EJERCICIO 2. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, con producto interno, $T : V \to \mathbb{K}$ un funcional lineal no nulo y v_0 el representante de Riesz de T.

1. Probar que $v_0 \in \big(Ker(T)\big)^{\perp}$.
2. Probar que $||v_0|| = \sqrt{T(v_0)}$.
3. Probar que $\dim((Ker(T))^{\perp}) = 1$.
4. Si $\{e\}$ es una base ortonormal de $\big(Ker(T)\big)^{\perp}$; probar que $v_0 = \overline{T(e)}\, e$.
5. Se considera la funcional lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por:
$$T(1, 0, 0) = 2, \qquad T(0, 1, 0) = 1, \qquad T(0, 0, 1) = -1.$$
Hallar una base de $\big(Ker(T)\big)^{\perp}$ y utilizarla para determinar el representante de Riesz de T.

2. Adjunta de una transformación lineal

EJERCICIO 3. Si $T, S : V \to W$ y $R : U \to V$ son transformaciones lineales entre $\mathbb{K}$-espacios vectoriales de dimensión finita con producto interno, y $\alpha \in \mathbb{K}$, probar las propiedades de la adjunta:

1. Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base ortonormal de V, entonces
$$T^*(w) = \langle w, T(e_1)\rangle_W \cdot e_1 + \ldots + \langle w, T(e_n)\rangle_W \cdot e_n,\ \forall w \in W.$$
2. $(T + S)^* = T^* + S^*$.
3. $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$.
4. $(T \circ R)^* = R^* \circ T^*$.
5. $(T^*)^* = T$.
6. T es invertible $\Leftrightarrow$ T^* es invertible. Además $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.
7. λ es valor propio de T $\quad\Leftrightarrow\quad$ $\overline{\lambda}$ es valor propio de T^*.
8. $Ker(T^*) = (Im(T))^{\perp}$.
9. $Im(T^*) = (Ker(T))^{\perp}$.

10. $Ker\,(T^*T) = Ker\,(T)\,.$
11. $\dim\,(Im\,(T^*T)) = \dim\,(Im\,(T)).$

Ejercicio 4.

1. a) Hallar el producto interno de $\mathbb{R}^2$ para el cual $\left\{\left(\frac{1}{4},0\right),\left(0,\frac{1}{2}\right)\right\}$ es una base ortonormal.
   b) Hallar el producto interno de $\mathbb{R}^3$ para el cual $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ es una base ortonormal.
2. Se considera la transformación lineal $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ tal que

$$T(x,y) = (x+3y, 3x+y, x+y)\,.$$

   Hallar T^* en las siguientes situaciones:
   a) $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ con los productos internos usuales.
   b) $\mathbb{R}^2$ con producto interno usual y $\mathbb{R}^3$ con el producto interno de la parte 1. b).
   c) $\mathbb{R}^2$ con el producto interno de la parte 1. a) y $\mathbb{R}^3$ con producto interno usual.
   d) $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ con los productos internos hallados en la parte 1.

Ejercicio 5. Hallar la transformación lineal adjunta de las siguientes transformaciones (con los productos internos usuales)

1. $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_1[x]$ tal que $T(p)=p'$.
2. $T:\mathcal{M}_3(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $T(A)=A^t+A$.

3. Representación matricial de la adjunta en bases ortonormales

Ejercicio 6. Hallar ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$ y ${}_{\mathcal{B}}(T^*)_{\mathcal{B}}$ en alguna base $\mathcal{B}$ conveniente, para las siguientes transformaciones lineales.

1. $T:\mathbb{C}^3\to\mathbb{C}^3$ tal que $T(x,y,z) = (\ 2x+iy,\ y-5iz,\ x+(1-i)y+3z\ )$.
2. $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y,z) = (\ 2x+y-z,\ x+y+z\ )$.
3. $T:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que $T(A)=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}A$.

Ejercicio 7. Se considera la transformación lineal $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z) = (x-y+2z, -2x+2y-3z,\ -x+y-z)\,.$$

1. Hallar bases de $Ker\,(T)$ y de $Im\,(T)\,.$
2. Sin determinar T^*, hallar bases de $Ker\,(T^*)$ y de $Im\,(T^*)\,.$

Ejercicio 8. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, S un subespacio vectorial de V y $T:V\to V$ una transformación lineal.
Probar que

$$S \text{ es invariante bajo } T \Leftrightarrow S^{\perp} \text{ es invariante bajo } T^*.$$

Ejercicio 9. Sea V un espacio vectorial con producto interno sobre $\mathbb{R}$, con $dim(V)=3$. Se considera una transformación lineal $T:V\to V$ y un subespacio vectorial S de V.

1. Si $dim(S)=1$ probar que S es invariante bajo T $\Leftrightarrow$ existe λ_0 valor propio de T tal que $S\subseteq N(T-\lambda_0 I)$.
2. Si $dim(S)=2$ probar que S es invariante bajo T $\Leftrightarrow$ existe λ_0 valor propio de T tal que $Im(T-\lambda_0 I)\subseteq S$

3. Se considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(x, y, z) = (7y - 6z,\ -x + 4y,\ 2y - 2z).$$

   a) Hallar <u>todos</u> los subespacios de dimensión 1 invariantes bajo T.

   b) Hallar <u>todos</u> los subespacios de dimensión 2 invariantes bajo T.