Cálculo diferencial e intelgral en una variable, segundo semestre 2024

Departamento de Matemática y Aplicaciones;
Cure–Universidad de la República

Tema: Trigonometría

§1. Gráficas.

(a) Trazar la gráfica de $\tan x$.
(b) Sea $\sec x = 1/\cos x$ definida cuando $\cos x \neq 0$. Trazar la gráfica de $\sec x$.
(c) Sea $\cot x = 1/\tan x$. Trazar la gráfica de $\cot x$.
(Sec y cot son abreviaturas para secante y cotangente.)
(d) Trazar las gráficas de las siguientes funciones:

(a) $y = \operatorname{sen} 2x$ (b) $y = \operatorname{sen} 3x$
(c) $y = \cos 2x$ (d) $y = \cos 3x$
(e) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ (f) $y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
(g) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ (h) $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$
(i) $y = \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$ (j) $y = \cos \frac{3}{2}x$

(e) Trazar las gráficas de las siguientes funciones:

(a) $y = 1 + \operatorname{sen} x$ (b) $y = 1 + \operatorname{sen} 2x$
(c) $y = -2 + \cos(x - 1)$ (d) $y = -\cos \frac{3}{2}\pi x$
(e) $y = 5 \operatorname{sen} \frac{3}{2}\pi x$ (f) $y = \cos 2x$
(g) $y = \cos \frac{3}{2}x$ (h) $y = -\cos 2x$

(f) Trazar la gráfica de la función $\operatorname{sen}(1/x)$ para $0 < x \leq \pi$.
(g) Trazar la gráfica de la función $\operatorname{sen}(1/x)$ para $0 < x \leq \pi$.
(h) Trazar la gráfica de la función $x^2 \operatorname{sen}(1/x)$ para $0 < x \leq \pi$.

En los ejercicios 6, 7 y 8, la función no está definida para $x = 0$.

§2. Cálculo de valores. Hallar los siguientes valores de la función sen y de la función cos:

(a) $\operatorname{sen} \frac{3\pi}{4}$ (b) $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{6}$
(c) $\operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}$ (d) $\operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$
(e) $\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$ (f) $\cos\left(\pi + \frac{2\pi}{6}\right)$
(g) $\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$ (h) $\cos \frac{5\pi}{4}$
(i) $\tan \frac{\pi}{4}$ (j) $\tan \frac{2\pi}{6}$
(k) $\tan \frac{5\pi}{4}$ (l) $\tan\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

§3. Un poco de geometría.

(a) Probar mediante la geometría plana que $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$.
(b) Probar mediante la geometría plana que $\cos(\pi - x) = -\cos x$.
(c) Probar mediante la geometría plana que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$.
(d) Probar mediante la geometría plana que $\cos(-x) = \cos x$.
(e) Sea a un número dado. Determinar todos los números x tales que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} a$. (Poder suponer que $0 \leq a < 2\pi$ y distinguir los casos $a = \pi/2$, $a = 3\pi/2$ y $a \neq \pi/2, 3\pi/2$.)

§4. Fórmulas trigonométricas. Probar las siguientes fórmulas:

(a) (1) $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ (2) $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$
(3) $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ (4) $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$
(b) Hallar una fórmula para $\operatorname{sen} 3x$ en términos de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. Análogamente, para $\cos 3x$.
(c) Probar por inducción que para cualesquiera enteros positivos m y n, $\operatorname{sen} mx$ y $\cos mx$ pueden expresarse como sumas de términos

$$\sum a_{ij} (\operatorname{sen} x)^i (\cos x)^j$$

donde los a_{ij} son enteros. Probar las siguientes fórmulas:

$$\operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$

$$\operatorname{sen} mx \cos nx = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(m-n)x + \operatorname{sen}(m+n)x]$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$$

§5. Derivadas y pendientes.

(a) Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

(a)	$\operatorname{sen}(3x)$	(b)	$\cos(5x)$
(c)	$\operatorname{sen}(4x^2+x)$	(d)	$\tan(x^3-5)$
(e)	$\tan(x^4-x^3)$	(f)	$\tan(\operatorname{sen} x)$
(g)	$\operatorname{sen}(\tan x)$	(h)	$\cos(\tan x)$

(b) ¿Cuál es la pendiente de la curva $y = \operatorname{sen} x$ en el punto de abscisa $x = \pi$?

Hallar la pendiente de las siguientes curvas en el punto indicado (solo se da la abscisa del punto):

(a)	$y = \cos(3x)$	en	$x = \frac{\pi}{3}$
(b)	$y = \operatorname{sen} x$	en	$x = \frac{\pi}{6}$
(c)	$y = \operatorname{sen} x + \cos x$	en	$x = \frac{3\pi}{4}$
(d)	$y = \tan x$	en	$x = -\frac{\pi}{4}$
(e)	$y = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$	en	$x = -\frac{\pi}{6}$

(c) Hallar la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en el punto indicado:

(a)	$y = \operatorname{sen} x$	en	$x = \frac{\pi}{2}$	(b)	$y = \cos x$	en	$x = \frac{\pi}{6}$
(c)	$y = \operatorname{sen} 2x$	en	$x = \frac{\pi}{4}$	(d)	$y = \tan 3x$	en	$x = \frac{\pi}{4}$
(e)	$y = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$	en	$x = \frac{\pi}{2}$	(f)	$y = \frac{1}{\cos x}$	en	$x = \frac{\pi}{4}$
(g)	$y = \frac{1}{\tan x}$	en	$x = -\frac{\pi}{4}$	(h)	$y = \tan \frac{x}{2}$	en	$x = 3\pi$
(i)	$y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$	en	$x = \frac{\pi}{3}$	(j)	$y = \cos \frac{\pi x}{3}$	en	$x = 1$
(k)	$y = \operatorname{sen} \pi x$	en	$x = \frac{1}{3}$	(l)	$y = \tan \pi x$	en	$x = \frac{1}{2}$

§6. Límites. Hallar los siguientes límites cuando h tiende a 0:

Sugerencia: Igualar $k = 2h$. Entonces $\frac{\operatorname{sen} 2h}{h} = 2\frac{\operatorname{sen} k}{k}$.

(a)	$\frac{\operatorname{sen} 2h}{h}$	(b)	$\frac{\operatorname{sen} 3h}{h}$
(c)	$\frac{\operatorname{sen} h}{3h}$	(d)	$\frac{\tan h}{\operatorname{sen} h}$
(e)	$\frac{\cos 2h}{1+\operatorname{sen} h}$	(f)	$\frac{\operatorname{sen} h^2}{h}$
(g)	$\frac{\operatorname{sen} 2h^2}{3h}$	(h)	$\frac{\operatorname{sen} h^3}{h^3}$
(i)	$\frac{\operatorname{sen} 2h^3}{h^3}$	(j)	$\frac{h \operatorname{sen} h}{\operatorname{sen} 2h^2}$
(k)	$\frac{\operatorname{sen} h(\operatorname{sen} 2h)}{h \cos h}$	(l)	$\frac{\tan^3 h}{h^2 \operatorname{sen} h \cos h}$
(m)	$\frac{(\operatorname{sen} h)(\tan h)}{h^2}$	(n)	$\frac{\operatorname{sen}^2 h}{h \tan h}$
(o)	$\frac{\operatorname{sen} h}{1-\cos h}$	(p)	$\frac{\tan h}{1-\cos h}$