5.1: Introducción a las Líneas de Transmisión - Parámetros Distribuidos

Habiendo aprendido algo sobre cómo generamos señales con transistores bipolares y de efecto de campo, ahora dirigimos nuestra atención al problema de obtener esas señales de un lugar a otro. Desde que Samuel Morse (y el fundador de mi *alma mater*, Ezra Cornell) demostraron el primer telégrafo en funcionamiento, ingenieros y científicos han estado trabajando en el problema de describir y predecir cómo se comportan las señales eléctricas a medida que viajan por estructuras específicas llamadas **líneas de transmisión**.

Cualquier estructura eléctrica que lleve una señal de un punto a otro puede considerarse una línea de transmisión. Ya sea un cable coaxial de larga distancia utilizado en Internet, un par trenzado en un edificio como parte de una red de área local, un cable que conecta una PC a una impresora, un diseño de bus en una placa base o una capa de metalización en un circuito integrado, el comportamiento fundamental de todas estas estructuras se describe por el mismo ecuaciones básicas. A medida que las velocidades de conmutación por computadora alcanzan los 100 megahercios, en el rango de gigahercios, las consideraciones sobre el comportamiento de la línea de transmisión son cada vez más críticas y se convierten en una fuerza más dominante en las limitaciones de rendimiento de cualquier sistema.

Para nuestros propósitos iniciales, presentaremos una figura de línea de transmisión “genérica”$5.1.1$, que incorporará la mayoría (pero no todas) características de las líneas de transmisión reales. Luego haremos algunas simplificaciones bastante amplias, que, si bien hacen que nuestros resultados sean menos aplicables a situaciones de la vida real, simplifican *enormemente* las soluciones y nos llevan a ideas que, de hecho, podemos aplicar a una amplia gama de situaciones.

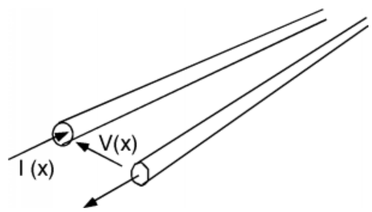


Figura
$5.1.1$
: Línea de transmisión “Genérica”

La línea genérica consta de dos conductores. Supondremos que$V(x)$ existe una diferencia de potencial entre los dos conductores, y que una corriente$I(x)$ fluye hacia abajo por un conductor, y regresa a través del otro. Por el momento, dejaremos que la línea de transmisión sea “semi-infinita”, lo que significa que tenemos acceso a la línea en algún momento$x$, pero la línea luego se extiende en$x$ dirección al infinito. (¡Tales líneas son un poco difíciles de manejar en el laboratorio!)

Para poder describir cómo$V(x)$ y$I(x)$ comportarse en esta línea, tenemos que hacer algún tipo de **modelo** de las características eléctricas de la propia línea. No podemos simplemente conformar cualquier modelo que queramos, sin embargo; tenemos que basar el modelo en realidades físicas.

Comencemos con solo considerar uno de los conductores y los efectos físicos de la corriente que fluye a través de ese conductor. Sabemos por la física de primer año que una corriente que fluye en un cable da lugar a un campo magnético,H (Figura$5.1.2$). Multiplica$H$ porμ y obtienes$B$, la densidad del flujo magnético, y luego integra$B$ sobre un plano paralelo a los cables y obtienesΦ, el flujo magnético que “une” el circuito. Esto se muestra en la Figura$5.1.3$ para al menos parte de la superficie. La definición de$L$, la inductancia de un elemento de circuito, es solo

$$L=\frac{\Phi}{I} \tag{5.1.1}$$

dondeΦ está el flujo que une el elemento del circuito, yI es la corriente que fluye a través de él. Nuestro único problema al encontrarΦ es que cuanto más larga sea una sección de alambre tomamos, másΦ tenemos para lo mismo$I$. Así, introduciremos el concepto de un **parámetro distribuido**.

Definición: Parámetro distribuido

Un parámetro distribuido es un parámetro que se extiende a lo largo de una estructura y no se limita a un elemento agrupado como una bobina de alambre.

Por ejemplo, definiremos aquí $\mathbf{L}$ como la **inductancia distribuida** para la línea de transmisión. Cuenta con unidades de $\mathrm{Henrys/meter}$. Si tenemos una longitud de línea de transmisión x_0 metros de largo, y si esa línea tiene una inductancia distribuida de $\mathbf{L}\ \mathrm{H/m}$, entonces la inductancia L de esa longitud de línea es justa $L = \mathbf{L}x_0$.

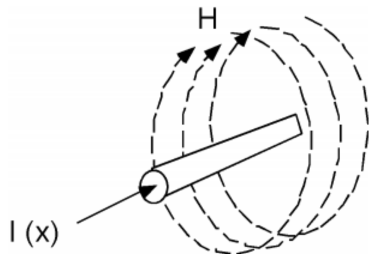


Figura
5.1.2
: Acumulación de campo magnético

De igual manera, si tenemos dos conductores separados por alguna distancia, y si hay una diferencia de potencial V entre los conductores, entonces debe haber alguna carga $\pm(Q)$ en los dos conductores lo que da lugar a esa diferencia de potencial. Podemos imaginar una distribución lineal de carga en la línea de transmisión, ρ (en unidades de $\mathrm{C/m}$), donde tenemos $\rho\ \mathrm{Coulombs/m}$ en un conductor, y $-\rho\ \mathrm{Coulombs/m}$ en el otro conductor. Para una línea de longitud x_0, tendríamos $Q = \pm(\rho x_0)$ en cada sección de alambre. Siempre que tenga dos conductores cargados con una diferencia de voltaje entre ellos, puede describir la relación entre la carga y el voltaje como una capacitancia. Los dos conductores tendrían una capacitancia

$$\begin{aligned} C &= \frac{Q}{V} \\ &= \frac{\rho x_0}{V} \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

y una capacitancia distribuida $\mathbf{C}$ (en unidades de $\mathrm{Farads/m}$), que es justo $\frac{\rho}{V}$. Una longitud de línea x_0 larga tendría una capacitancia $C = \mathbf{C}x_0\ \mathrm{Farads}$ asociada a ella, como en la Figura 5.1.4.

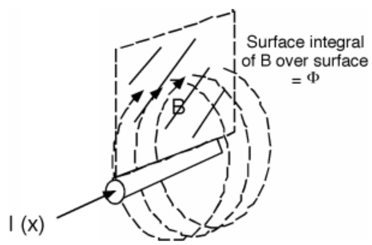


Figura
5.1.3
: Encuentre el enlace de flujo
Φ

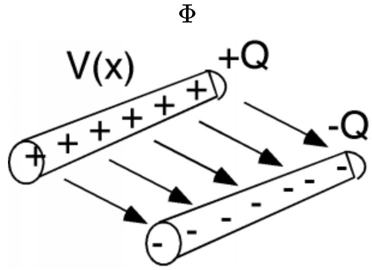


Figura
5.1.4
: Capacitancia de línea

Así, vemos que la línea de transmisión tiene tanto una inductancia $\mathbf{L}$ distribuida como una capacitancia distribuida $\mathbf{C}$, las cuales están atadas entre sí. Realmente no hay manera de que podamos separar uno del otro. En otras palabras, no podemos tener sólo la capacitancia, o solo la inductancia'; siempre habrá algo de cada uno asociado a cada sección de línea ahora importa cuán pequeña o cuán grande la hagamos.

Ya estamos listos para construir nuestro modelo. Lo que queremos hacer es llegar a alguna disposición de inductores y capacitores que representen eléctricamente las propiedades de la capacitancia distribuida y la inductancia que discutimos anteriormente. A medida que un largo de línea se alarga, su capacitancia aumenta, así que mejor tendríamos que poner las capacitancias distribuidas en paralelo entre sí, ya que esa es la forma en que se suman los condensadores. También, a medida que la línea se alarga, su inductancia total aumenta, así que mejor teníamos que poner las inductancias distribuidas en serie entre sí, pues esa es la forma en que se suman las inductancias. La figura$5.1.5$ es una representación de la inductancia y capacitancia distribuidas de la línea de transmisión genérica.

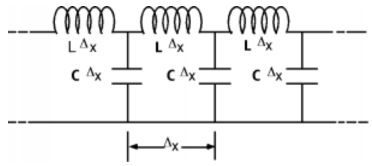


Figura
$5.1.5$
: Modelo de parámetros distribuidos

Rompemos la línea en seccionesΔx largas, cada una con una inductancia$\mathbf{L}\Delta x$ y una capacitancia$\mathbf{C}\Delta x$. Si reducimos a la mitad Δx, reduciríamos a la mitad la inductancia y capacitancia de cada sección, pero tendríamos el doble de ellas por unidad de longitud. ¡Duh! El punto es que no importa lo finos que hagamos$\mathbf{C}\Delta x$, todavía tenemos inductores y capacitores dispuestos como vemos en la Figura$5.1.5$, con los dos tipos de componentes entremezclados.

Podríamos hacer un modelo más realista y darnos cuenta de que todos los cables reales tienen resistencia en serie asociada a ellos, y que lo que sea que usemos para mantener los dos conductores separados tendrá alguna conductancia de fuga asociada. Para dar cuenta de esto, introduciríamos una resistencia en serie$\mathbf{R}$ (Ωpor unidad de longitud) y una conductancia en serie$\mathbf{G}$ (Ωpor unidad de longitud). Una sección de nuestro modelo de línea entonces se parece a Figura$5.1.6$.

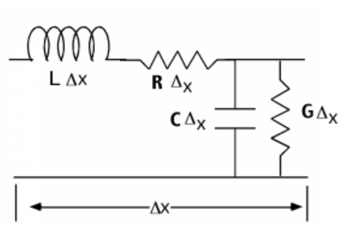


Figura
$5.1.6$
: Modelo distribuido completo

A pesar de *que se* trata de un modelo más realista, lleva a matemáticas mucho más complicadas. Empezaremos de todos modos, ignorando la resistencia en serie$\mathbf{R}$ y la conductancia de derivación$\mathbf{G}$. Esta “aproximación” resulta ser bastante buena siempre y cuando o la línea no sea demasiado larga, o las frecuencias de las señales que estamos enviando por la línea no lleguen demasiado altas. Sin la resistencia en serie o la conductancia paralela tenemos lo que se llama una **línea de transmisión ideal sin pérdidas**.

5.2: Ecuaciones del Telégrafo

Veamos solo una pequeña sección de la línea, y definamos algunos voltajes y corrientes como en la Figura$5.2.1$.

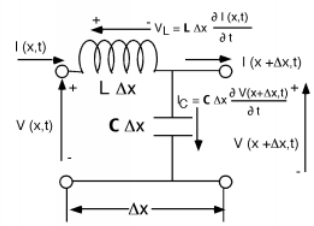


Figura
$5.2.1$
: Aplicación de las leyes de Kirchoff

Para la sección de línea$Deltax$ larga, el voltaje en su entrada es justo$V(x,t)$ y el voltaje en la salida es$V(x+\Delta x,t)$. De igual manera, tenemos una corriente$I(x,t)$ entrando al tramo, y otra corriente$I(x+\Delta x,t)$ que sale del tramo de línea. Tenga en cuenta que tanto el voltaje como la corriente son funciones de **tiempo** así como de posición.

La caída de voltaje a través del inductor es solo:

$$V_L = \mathbf{L}\Delta(x)\frac{\partial I(x,t)}{\partial t} \tag{5.2.1}$$

Del mismo modo, la corriente que fluye hacia abajo a través del condensador es

$$I_C = \mathbf{C}\Delta(x)\frac{\partial V(x+\Delta(x),t)}{\partial t} \tag{5.2.2}$$

Ahora hacemos un KVL alrededor del exterior de la sección de línea y obtenemos

$$V(x,t) - V_L - V(x+\Delta(x),t) = 0 \tag{5.2.3}$$

Sustituyendo$5.2.1$ la ecuaciónV_L y llevándola al lado derecho, tenemos

$$V(x,t) - V(x+\Delta(x),t) = \mathbf{L}\Delta(x)\frac{\partial I(x,t)}{\partial t} \tag{5.2.4}$$

Multipliquemos esto por-1, y llevemos el$\Delta(x)$ sobre al lado izquierdo.

$$\frac{V(x+\Delta(x),t) - V(x,t)}{\Delta(x)} = -\left(\mathbf{L}\frac{\partial I(x,t)}{\partial t}\right) \tag{5.2.5}$$

Tomamos el límite como$\Delta(x) \to 0$ y el LHS se convierte en un derivado:

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = -\left(\mathbf{L}\frac{\partial I(x,t)}{\partial t}\right) \tag{5.2.6}$$

Ahora podemos hacer un KCL en el nodo donde se unen el inductor y el condensador.

$$I(x,t) - \mathbf{C}\Delta(x)\frac{\partial V(x+\Delta(x),t)}{\partial t} - I(x+\Delta(x),t) = 0 \tag{5.2.7}$$

Y tras el reordenamiento:

$$\frac{I(x+\Delta(x),t) - I(x,t)}{\Delta(x)} = -\left(\mathbf{C}\frac{\partial V(x+\Delta(x),t)}{\partial t}\right) \tag{5.2.8}$$

Ahora cuando dejamos$\Delta(x) \to 0$, el lado izquierdo vuelve a ser un derivado, y en el lado derecho$V(x+\Delta(x),t) \to V(x,t)$, entonces tenemos:

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = -\left(\mathbf{C}\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}\right) \tag{5.2.9}$$

Ecuación$5.2.6$ y Ecuación$5.2.9$ son tan importantes que volveremos a escribirlas juntas:

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = -\left(\mathbf{L}\frac{\partial I(x,t)}{\partial t}\right) \tag{5.2.10}$$

$$\frac{\partial I(x,t)}{\partial x} = -\left(\mathbf{C}\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}\right) \tag{5.2.11}$$

Estas se llaman **ecuaciones del telégrafo**, y son todo lo que realmente necesitamos para derivar cómo se comportan las señales eléctricas a medida que avanzan en las líneas de transmisión. Tenga en cuenta lo que dicen. El primero dice que en algún momento ax lo largo de la línea, la caída de voltaje incremental que experimentamos a medida que bajamos de la línea es solo la inductancia distribuida$\mathbf{L}$ multiplicada por el tiempo derivado de la corriente que fluye en la línea en ese punto. La segunda ecuación simplemente nos dice que la pérdida de corriente a medida que bajamos por la línea es proporcional a la capacitancia distribuida$\mathbf{C}$ multiplicada por la tasa de tiempo de cambio de la tensión en la línea. Como debe ser fácilmente consciente, lo que tenemos aquí son un par de **ecuaciones diferenciales lineales acopladas en tiempo y posición** para$V(x,t)$ y$I(x,t)$.

5.3: Ecuación de Línea de Transmisión

Tenemos que resolver las ecuaciones del telégrafo,

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = -\left(\mathbf{L}\frac{\partial I(x,t)}{\partial t}\right) \tag{5.3.1}$$

$$\frac{\partial (I,t)}{\partial x} = -\left(\mathbf{C}\frac{\partial V(x,t)}{\partial t}\right) \tag{5.3.2}$$

La forma en que procederemos a una solución, y la forma en que procedes siempre cuando te enfrentas a un par de ecuaciones como estas, es tomar una derivada espacial de una ecuación, y luego sustituir la segunda ecuación por la derivada espacial en la primera y terminas con... bueno, probémosla y veamos.

Tomando una derivada con respecto ax la Ecuación$5.3.1$,

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_2^2} = -\left(\mathbf{L}\frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial t \partial x}\right) \tag{5.3.3}$$

Ahora sustituimos por$\frac{\partial I(x,t)}{\partial x}$ de Ecuación$5.3.2$:

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_2^2} = \mathbf{LC}\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial t_2^2} \tag{5.3.4}$$

Debería ser *muy* fácil para ti derivar

$$\frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial x_2^2} = \mathbf{LC}\frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial t_2^2} \tag{5.3.5}$$

¡Oh, sé que a todos les encantan las ecuaciones diferenciales! Bueno, echemos un vistazo a estos y solo pensemos por un minuto. Para *cualquiera*$V(x,t)$ o$I(x,t)$, necesitamos encontrar una función que tenga algunos requisitos bastante estrictos. En primer lugar, la función debe ser de la forma tal que no importa si tomamos su segunda derivada en el espacio (x) o en el tiempo (t), debe terminar difiriendo en la forma en que se comporta en$x$ ot por no más que solo una constante ($\mathbf{LC}$).

De hecho, podemos ser más específicos que eso. Primero,$V(x,t)$ debe tener la misma forma funcional *tanto* para su como para su xt variación. A lo sumo, las dos derivadas deben diferir sólo por una constante. Intentemos una conjetura “afortunada” y dejemos:

$$V(x,t) = V_0 f(x - vt) \tag{5.3.6}$$

dondeV_0 está la amplitud de la tensión, yf es alguna función de una forma aún indeterminada. Bueno,

$$\frac{\partial f(x-vt)}{\partial t} = -(vf') \tag{5.3.7}$$

y

$$\frac{\partial^2 f(x-vt)}{\partial t_2^2} = v^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}} \tag{5.3.8}$$

Obsérvese también que

$$\frac{\partial^2 f(x-vt)}{\partial x_2^2} = f'' \tag{5.3.9}$$

Ahora, tomemos Ecuaciones$5.3.6$$5.3.8$,$5.3.9$ y sustituyéndolas en Ecuación$5.3.4$:

$$V_0\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}} = \mathbf{LC}V_0 v^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}} \tag{5.3.10}$$

Nuestra suposición “afortunada” funciona como solución siempre y cuando

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{\mathbf{LC}}} \tag{5.3.11}$$

Entonces, ¿qué es esto $f(x - vt)$? Aún no sabemos cuál será su forma funcional real, pero supongamos que en algún momento, t_1, la función se parece a Figura $5.3.1$.

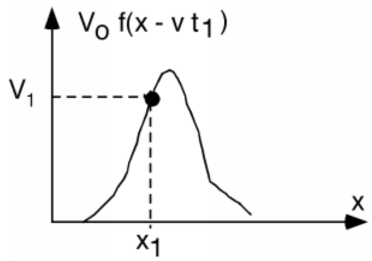


Figura $5.3.1$: $f(x)$ en el momento t_1

En el punto x_1, la función adquiere el valor V_1. Ahora, avancemos a tiempo t_2. Miramos la función y vemos Figura $5.3.2$.

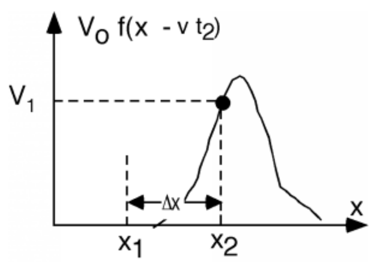


Figura $5.3.2$: $f(x)$ en un momento posterior t_2

Si t aumenta de t_1 a t_2, entonces x tendrá que aumentar de x_1 a x_2 para que el argumento de f tenga el mismo valor, V_1. Así encontramos

$$x_1 - vt_1 \equiv x_2 - vt_2 \tag{5.3.12}$$

que se puede reescribir como

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta(x)}{\Delta(t)} \equiv v_p = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{LC}}} \tag{5.3.13}$$

donde v_p esta la velocidad con la que la función se mueve a lo largo del eje x! (Utilizamos el subíndice “p” para indicar que lo que tenemos aquí es lo que se llama la **velocidad de fase**. Nos encontraremos con otra velocidad llamada la **velocidad del grupo** un poco más tarde en el curso.)

Si hubiéramos “adivinado” una $f(x + vt)$ para nuestra función, debería ser bastante fácil ver que esto nos hubiera dado una señal moviéndose en la x dirección **menos**, en lugar de la x dirección más. Así denotaremos

$$V_{\text{plus}} = V^+ f\left(x - \frac{1}{\sqrt{\mathbf{LC}}} t\right) \tag{5.3.14}$$

la **función de voltaje positivo** y

$$V_{\text{minus}} = V^- f\left(x + \frac{1}{\sqrt{\mathbf{LC}}} t\right) \tag{5.3.15}$$

la **función de voltaje negativo**. Observe que ya que estamos tomando la *segunda* derivada de f con respecto a t, somos libres de elegir ya sea un argumento $\frac{1}{\sqrt{\mathbf{LC}}}$ o un $-\frac{1}{\sqrt{\mathbf{LC}}}$ delante del tiempo dentro f. También tenga en cuenta que estas son nuestras *únicas* opciones para una solución. Como sabemos por Ecuaciones Diferenciales, una ecuación de segundo orden tiene, como mucho, dos soluciones independientes.

Dado que $I(x, t)$ tiene la *misma* ecuación diferencial describiendo su comportamiento, las soluciones para también I deben ser exactamente de la misma forma. Así podemos dejar

$$I_{\text{plus}} = I^{+} f\left(x - \frac{1}{\sqrt{\mathbf{LC}}} t\right) \tag{5.3.16}$$

representar la función actual que va en la$x$ dirección positiva, y

$$I_{\text{minus}} = I^{-} f\left(x + \frac{1}{\sqrt{\mathbf{LC}}} t\right) \tag{5.3.17}$$

representar la función de corriente que va negativa.

Ahora, tomemos Ecuación$5.3.16$y Ecuación$5.3.14$y sustituyémoslas en Ecuación$5.3.1$:

$$\frac{V^{+}}{\sqrt{\mathbf{LC}}} f\left(x - \frac{1}{\sqrt{\mathbf{LC}}} t\right) = \mathbf{L} I^{+} f\left(x - \frac{1}{\sqrt{\mathbf{LC}}} t\right) \tag{5.3.18}$$

Esto se puede resolverV^{+} en términos deI^{+}.

$$V^{+} = \sqrt{\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{C}}} I^{+} \equiv Z_0 I^{+} \tag{5.3.19}$$

donde$Z_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{C}}}$ se llama la **impedancia característica** de la línea de transmisión. Lo dejaremos como un ejercicio al lector para asegurar que efectivamente$\sqrt{\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{C}}}$ tiene unidades de Ohmios. Para practicar y comprender cómo funcionan estas ecuaciones, el lector debe asegurarse de que

$$V^{-} = -\left(\sqrt{\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{C}}} I^{-}\right) \equiv -\left(Z_0 I^{-}\right) \tag{5.3.20}$$

¡Observe la diferencia "sutil" aquí, con la presencia de un signo menos frente al RHS de la ecuación!

Hemos pasado por muchas ecuaciones recientemente, así que probablemente valga la pena resumir lo que sabemos hasta ahora.

1. Las ecuaciones del telégrafo permiten dos soluciones para el voltaje y la corriente en una línea de transmisión. Uno se mueve en la$x$ dirección y el otro se mueve en la$-x$ dirección.
2. Ambas señales se mueven a una velocidad constantev_p dada por la Ecuación$5.3.21$
3. Las señales de voltaje y corriente están relacionadas entre sí por la impedancia característicaZ_0, que se encuentra con la ecuación$5.3.22$

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{LC}}} \tag{5.3.21}$$

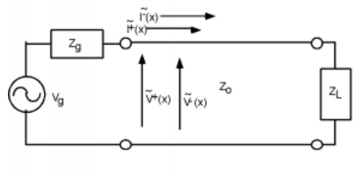
$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{C}}} \tag{5.3.22}$$

$$\frac{V^{+}}{I^{+}} = Z_0 \tag{5.3.23}$$

$$\frac{V^{-}}{I^{-}} = -Z_0 \tag{5.3.24}$$

5.6: Líneas Terminadas

Si, por otro lado, tenemos una línea finita, terminada con alguna impedancia de carga, tenemos un problema algo más complicado de tratar (como se muestra en la Figura$5.6.1$.



Figura$5.6.1$: Una línea de transmisión finita terminada

Hay varias cosas que debemos tener en cuenta *antes de* volver a dirigirnos a la ecuación-tierra. En primer lugar, a diferencia de los problemas transitorios que vimos anteriormente, no puede haber más de *dos* señales de voltaje y corriente en la línea, soloV^+ y V^-, (yI^+ yI^-). Ya no tenemos el lujo de tenerV_1^+,V_2^+, etc., porque ahora estamos hablando de un **sistema de estado estable**. Todas las soluciones transitorias que se acumularon cuando el generador se conectó por primera vez a la línea se han sumado en solo dos ondas.

Así, en la línea tenemos una sola función de voltaje total, que es solo la suma de las ondas de voltaje positivas y negativas

$$V(x) = V^+ e^{-(i\beta x)} + V^- e^{i\beta x} \tag{5.6.1}$$

y una función de corriente total

$$I(x) = I^+ e^{-(i\beta x)} + I^- e^{i\beta x} \tag{5.6.2}$$

Tenga en cuenta también que hasta que hayamos resuelto paraV^+ yV^-, no sabemosV_x ni enI_x ningún lugar de la línea. En particular, desconocemos$V(0)$ y$I(0)$, lo que nos diría cuál es la impedancia aparente que está buscando dentro de la línea.

$$\begin{aligned} Z_{\text{in}} &= Z(0) \\ &= \frac{V^+ + V^-}{I^+ + I^-} \end{aligned} \tag{5.6.3}$$

Hasta que sepamos qué tipo de impedancia está viendo el generador, ¡no podemos averiguar cuánto del voltaje del generador se acoplará a la línea! La impedancia de entrada que mira dentro de la línea es ahora una función de la impedancia de carga, la longitud de la línea y la velocidad de fase en la línea. Tenemos que resolver esto *antes de* que podamos averiguar cómo interactuarán la línea y el generador.

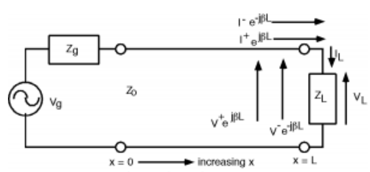
El enfoque que tendremos que tomar es el siguiente. Comenzaremos en el extremo de **carga** de la línea, y de una manera similar a la que usamos anteriormente, encontraremos una relación entreV^+ yV^-, dejando su magnitud y fase reales como algo a determinar posteriormente. Entonces podemos propagar los dos voltajes (y corrientes) de nuevo a la entrada, determinar cuál es la impedancia de entrada encontrando la relación de$\left(V^+ + V^-\right)$ a$\left(I^+ + I^-\right)$, y a partir de esto, y el conocimiento de las propiedades del generador y su impedancia, determinar cuáles son los voltajes y corrientes reales.

Echemos un vistazo a la carga. Nuevamente utilizamos KVL y KCL (Figura$5.6.2$) para hacer coincidir los voltajes y corrientes en la línea y los voltajes y corrientes en la carga:

$$V^+ e^{-(i\beta L)} + V^- e^{i\beta L} = V_L \tag{5.6.4}$$

y

$$I^+ e^{-(i\beta L)} + I^- e^{-\beta L} = I_L \tag{5.6.5}$$



Figura$5.6.2$: Haciendo Kirchoff al final de la línea. ¡Cambia las variables!

Ahora bien, *podríamos* sustituir $\frac{\pm(V)}{Z_0}$ las dos corrientes en la línea y $\frac{V_L}{Z_L}$ para I_L y luego tratar de resolver V_{-} en términos de V^+ usar Ecuaciones 5.6.4 y 5.6.5, pero podemos ser un poco inteligentes al principio y hacer que nuestro álgebra (complejo) sea un poco bueno limpiador como se muestra en la Figura 5.6.3. Hagamos un cambio de variable y vamos

$$s \equiv L - x \tag{5.6.6}$$

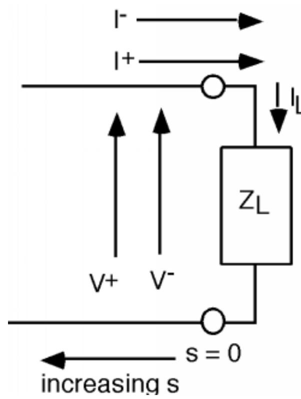


Figura 5.6.3: ¡$s = 0$ a la carga y así se van los exponenciales!

Esto nos da entonces para el voltaje en la línea (usando $x = L - s$)

$$V(s) = V^+ e^{-(i\beta L)} e^{i\beta L} + V^- e^{i\beta L} e^{-i\beta L} \tag{5.6.7}$$

Por lo general, simplemente plegamos los $e^{\pm(i\beta L)}$ términos de fase (constante) con el $V^+ V^-$ y y así tenemos:

$$V(s) = V^+ e^{i\beta s} + V^- e^{-(i\beta s)} \tag{5.6.8}$$

Tenga en cuenta que cuando hacemos esto, ahora tenemos un exponencial **positivo** en el primer término asociado V^+ y un exponencial **negativo** asociado con el V^- término. Por supuesto, también obtenemos por $I(s)$:

$$I(s) = I^+ e^{i\beta s} + I^- e^{-(i\beta s)} \tag{5.6.9}$$

Este cambio ahora mueve nuestro origen al final de **carga** de la línea, e invierte la dirección del movimiento positivo. *Pero*, ahora cuando nos conectamos $e^{i\beta s}$ al valor para s a la carga $(s = 0)$, las ecuaciones simplifican a:

$$V^+ + V^- = V_L \tag{5.6.10}$$

y

$$I^+ + I^- = I_L \tag{5.6.11}$$

que luego reescribimos como

$$\frac{V^+}{Z_0} - \frac{V^-}{Z_0} = \frac{V_L}{Z_L} \tag{5.6.12}$$

Esto empieza a parecerse casi exactamente a un capítulo anterior. Como recordatorio, resolvemos Ecuación 5.6.12 para V_L:

$$V_L = \frac{Z_L}{Z_0}\left(V^+ - V^-\right) \tag{5.6.13}$$

y sustituirlo V_L en Ecuación 5.6.10:

$$V^+ + V^- = \frac{Z_L}{Z_0}\left(V^+ - V^-\right) \tag{5.6.14}$$

De lo que luego resolvemos para el coeficiente de reflexión Γ_v, la relación de V^- a V^+.

$$\frac{V^-}{V^+} \equiv \Gamma_v = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \tag{5.6.15}$$

Tenga en cuenta que dado que, en general, Z_L será complejo, podemos esperar que Γ_v también sea un número complejo con tanto una magnitud $|\Gamma_v|$ como un ángulo de fase θ_Γ. También, como en el caso cuando estábamos viendo transitorios, $|\Gamma_v| < 1$.

Como ahora sabemos V^- en términos de V^+, ahora podemos escribir una expresión para $V(s)$, el voltaje en cualquier lugar de la línea.

$$V(s) = V^+ e^{i\beta s} + V^- e^{-(i\beta s)} \tag{5.6.16}$$

Obsérvese nuevamente el cambio en los signos en los dos exponenciales. Como nuestra variable espacial s va en dirección opuesta a x, el V^+ fasor ahora va como $i\beta s$ y el V^- fasor ahora va como $-(i\beta s)$.

Ahora sustituimos V^- en $\Gamma_v V^+$ Ecuación $5.6.16$, y por razones que pronto se harán evidentes, factorizar un $e^{i\beta s}$.

$$\begin{aligned} V(s) &= V^+ e^{i\beta s} + \Gamma_v V^+ e^{-(i\beta s)} \\ &= V^+ \left(e^{i\beta s} + \Gamma_v e^{-(i\beta s)}\right) \\ &= V^+ e^{i\beta s} \left(1 + \Gamma_v e^{-(2i\beta s)}\right) \end{aligned} \tag{5.6.17}$$

También podríamos haber escrito una ecuación para $I(s)$, la corriente a lo largo de la línea. Será una buena prueba de su comprensión de las ecuaciones básicas que estamos desarrollando aquí para mostrarse que efectivamente

$$I(s) = \frac{V^+ e^{i\beta s}}{Z_0} \left(1 - \Gamma_v e^{-(2i\beta s)}\right) \tag{5.6.18}$$
