

Cálculo diferencial e integral en una variable, segundo semestre 2024

Departamento de Matemática y Aplicaciones;
Cure-Universidad de la República

TEMA: RAZÓN DE CAMBIO Y CÁLCULO DE DERIVADAS

§1. Razón de cambio.

- Una partícula se mueve de tal forma que en el instante t la distancia está dada por la función $s(t) = 2t^4 + t^2$. ¿En qué momento es la velocidad igual a 0?
- Un objeto se mueve sobre una línea recta con velocidad dada por la función $v(t) = 4t^3 - 3t^2 + 2$. Hallar la aceleración en el instante $t = 2$.
- Una partícula se mueve de tal forma que en el instante t , la distancia recorrida está dada por $s(t) = t^3 - 2t + 1$. ¿En qué instantes la aceleración es igual a 0?
- Un cubo se expande de tal forma que su arista cambia a razón de 5 cm por segundo. Cuando su arista es de 4 cm hallar la razón de cambio del volumen.
- Una esfera crece de tal forma que su radio aumenta a razón de 1 cm por segundo. ¿A qué velocidad cambia su volumen cuando su radio es de 3 cm? (El volumen de una esfera es igual a $4\pi r^3/3$).
- ¿Cuál es la razón de cambio del área de un círculo con respecto a su radio, a su diámetro, y a su circunferencia? (El lector puede suponer que el área de un círculo está dada por la fórmula $A = \pi r^2$, donde r es el radio, y su circunferencia está dada por $2\pi r$).
- Un punto se mueve a lo largo de la gráfica de $y = 1/(x^2 + 4)$ de tal forma que su abscisa cambia a razón de 3 unidades por segundo. ¿Cuál es la razón de cambio de su ordenada cuando $x = 2$?

§2. Cálculo de derivadas, primera parte. Hallar las derivadas de las siguientes funciones. No simplificar las respuestas.

- | | |
|---|--|
| (a) $3x^3 - 4x + 5$ | (k) $(2x^2 + 1) \left(\frac{1}{x^2} + 4x + 8 \right)$ |
| (b) $x^2 + 2x + 27$ | (l) $(x^4 - x^2)(x^2 - 1)$ |
| (c) $x^2 + x - 1$ | (m) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$ |
| (d) $x^{1/2} - 8x^4 + x^{-2}$ | (n) $5(x - 1)(x + 2)(x^2 + 1)$ |
| (e) $5x^{5/2} + x^{-5/2}$ | (o) $3x(x^2 + 1)(x + 1)$ |
| (f) $x^7 + 15x^{-1/5}$ | (p) $(x^4 + 1)(x + 5)(2x + 7)$ |
| (g) $(x^2 - 1)(x + 5)$ | (q) $\frac{1}{2x+3}$ |
| (h) $\left(x^5 + \frac{1}{x}\right)(x^5 + 1)$ | (r) $\frac{1}{7x+27}$ |
| (i) $(x^{3/2} + x^2)(x^4 - 99)$ | (s) $\frac{5}{x^3+2x^2}$ |
| (j) $(x^2 + x + 1)(x^5 - x - 25)$ | (t) $\frac{3}{2x^4+x^3/2}$ |

§3. Recta tangente

- Demostrar que la recta $y = -x$ es tangente a la curva dada por la ecuación $y = x^4 - 6x^2 + 8x$. Hallar el punto de tangencia.
- Demostrar que la recta $y = 9x - 15$ es tangente a la curva $y = x^2 - 3x + 1$. Hallar el punto de tangencia.
- Demostrar que las gráficas de las ecuaciones $y = 3x^2$ y $y = 2x^2 + 1$ tienen una tangente común en el punto $(1, 3)$. Trazar las gráficas.
- Demostrar que hay exactamente dos rectas tangentes a la gráfica de $y = (x + 1)^4$ que pasan por el origen y hallar sus ecuaciones.
- Hallar todos los puntos (x_0, y_0) sobre la curva $y = 4x^4 - 8x^2 + 16x + 7$ tales que la recta tangente a la curva en el punto (x_0, y_0) sea paralela a la recta $16x - y + 5 = 0$. Hallar la recta tangente a la curva en cada uno de esos puntos.

§4. Cálculo de derivadas, segunda parte. Hallar las derivadas de las siguientes funciones. No simplificar las respuestas.

- | | |
|-----------------------|--|
| (a) $\frac{-2x}{x+1}$ | (c) $3x^{1/2} \left(\frac{1}{(x+1)(x-1)} \right)$ |
| (b) $\frac{x+1}{x-5}$ | (d) $\frac{(x+1)(x+5)}{x-4}$ |

- | | |
|---|--|
| (e) $\frac{2x^{1/2} + 3x^{3/4}}{x^3}$ | (n) $\frac{5x - 3}{\frac{x^2}{1}}$ |
| (f) $\frac{x^2}{2x^3} + 7$ | (o) $\frac{1}{x + 1}$ |
| (g) $\frac{5}{(x^2 + 1)(x + 7)}$ | (p) $\frac{x - 1}{(x - 2)(x - 3)}$ |
| (h) $\frac{x^{1/2} + x}{x + 2}$ | (q) $\frac{-x/2}{\frac{x^{3/4}}{x + 5}}$ |
| (i) $\frac{8x}{4x - 3}$ | (r) $\frac{x^2 + 1}{2x^2 + 3x + 1}$ |
| (j) $\frac{x^2 + 3}{4x - 3}$ | (s) $\frac{x + 1}{\frac{x + 1}{x - 5}}$ |
| (k) $\frac{1}{x^3} + \frac{6x + x^{3/4}}{7x - 2}$ | (t) $\frac{x + 1}{-x^2}$ |
| (l) $\frac{3x^4 + x^{5/4}}{4x^4} + 1$ | (u) $\frac{x + 1}{x - 1}$ |
| | (v) $\frac{x - 1}{(x - 2)(x - 3)}$ |

§5. Cálculo de derivadas, tercera parte. Hallar las derivadas de las siguientes funciones. No simplificar las respuestas.

- | | |
|---------------------------|------------------------------|
| (a) $(2x + 1)^2$ | (m) $(x - 1)(x - 5)^3$ |
| (b) $2x + 5^3$ | (n) $(2x^2 + 1)(2x + 3x^2)$ |
| (c) $(5x + 3)^7$ | (o) $(x^3 + x^2 - 2x - 1)^4$ |
| (d) $7x - 2^8$ | (p) $(x^2 + 1)^3(2x + 5)^2$ |
| (e) $(x^2 + x - 5)^3$ | (q) $(2x + 1)^{3/4}$ |
| (f) $(2x - 3)^{3/4}$ | (r) $(x^2 + 1)^{1/2}$ |
| (g) $(3x + 1)^{1/2}$ | (s) $(3x + 2)^9$ |
| (h) $(2x - 5)^{5/4}$ | (t) $(x^2 + 1)(3x - 7)^8$ |
| (i) $(x^2 + x - 1)^{-2}$ | (u) $\sqrt{2x + 1}$ |
| (j) $(x^4 + 5x + 6)^{-1}$ | (v) $\sqrt{x + 3}$ |
| (k) $(3x + 5)^{-3}$ | (w) $\sqrt{x^2 + x + 5}$ |
| (l) $(x^3 + x + 1)^3$ | (x) $\sqrt{2x^3 - x + 1}$ |

§6. Derivadas de funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmica. Hallar las derivadas de las siguientes funciones. No simplificar las respuestas.

- | | |
|---------------------------------|--------------------------|
| (a) $\sin(x^3 + 1)$ | (k) $\sin(\log(2x + 1))$ |
| (b) $\cos(\log(x^3 + 1))$ | (l) $2x^2 + 1$ |
| (c) $\log(\sin(x))$ | (m) $\cos(e^{2x})$ |
| (d) e^{2x+1} | (n) $\sin(2x + 1)$ |
| (e) $\cos(\sin x)$ | (o) $e^{\log(x+1)}$ |
| (f) $\cos(e^x)$ | (p) $\cos^3 x$ |
| (g) $(2x^2 + 3x + 5)/(x^2 + 3)$ | (q) $\sin(x)^{30}$ |
| (h) $(7x - 1)/(x + 1)$ | (r) $e^{2x} - x^5$ |
| (i) $\log(2x + 1)$ | (s) $\log(x^{20})$ |
| (j) $\cos^2 x - 1$ | |