PRÁCTICO 6: COMPLEMENTO ORTOGONAL Y PROYECCIÓN ORTOGONAL.

1. Complemento ortogonal

EJERCICIO 1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno.

1. Sean A y B subconjuntos de V. Probar que:
   a) Si $A \subset B \quad \Rightarrow \quad B^\perp \subset A^\perp$,
   b) $A^\perp = [A]^\perp$,
   c) $A \subset (A^\perp)^\perp$.
2. Sean S y W subespacios de V. Probar que:
   a) $S = (S^\perp)^\perp$,
   b) $(S+W)^\perp = S^\perp \cap W^\perp$,
   c) $(S \cap W)^\perp = S^\perp + W^\perp$.
3. Interprete geométricamente los resultados anteriores.

EJERCICIO 2.
1. Se considera en $\mathbb{C}^3$ con el producto interno habitual el subespacio $S = \big[(i,0,1)\big]$. Hallar una base del subespacio $S^\perp$.
2. En $\mathbb{R}^3$, se considera el subespacio $S = \big[(1,2,1)\big]$. Calcular $S^\perp$ con:
   a) el producto interno usual de $\mathbb{R}^3$;
   b) el producto interno $\big\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\big\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1$.

EJERCICIO 3. En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno habitual, se considera el subconjunto $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=1\}$. Calcular $\dim(S^\perp)$.

EJERCICIO 4. Sea $S = [(3,5,1)] \cup \{(0,1,1)\}$ un subconjunto de $\mathbb{R}^3$.
Se considera $\langle (x,y,z),(x',y',z')\rangle = xx' + 2yy' + 3zz'$ producto interno en $\mathbb{R}^3$. Calcular $S^\perp$.

EJERCICIO 5. En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno $\big\langle (x,y,z),(x',y',z')\big\rangle = xx' + 2yy' + 3zz'$, consideramos el conjunto $A = \big\{(n,2n,4n) : n \in \mathbb{N}\big\} \cup \big\{(1,1,1)\big\}$. Calcular $A^\perp$.

EJERCICIO 6. Se consideran el espacio $\mathbb{R}^3$ con el producto interno definido por

$$\langle x,y\rangle = 2x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

donde $x = (x_1,x_2,x_3)$ e $y = (y_1,y_2,y_3)$, y el subespacio S generado por el vector $(1,1,1)$.
Hallar una base ortogonal de $S^\perp$.
(1) $\{(3,-4,1),\ (1,1,-2)\}$.
(2) $\{(1,0,1),\ (-1,0,1)\}$.
(3) $\{(0,1,-1),\ (-1,1,1)\}$.
(4) $\{(2,-1,-1),\ (0,1,-1)\}$.
(5) $\{(-1,0,2),\ (2,-5,1)\}$.

EJERCICIO 7. Sea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ con el producto interno : $\langle A,B\rangle = tr(AB^t)$.

1. Hallar una base ortonormal de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Sea $\mathcal{D}$ el subespacio de las matrices diagonales, hallar $\mathcal{D}^\perp$.
3. Sea $\mathcal{S}$ el subespacio de las matrices simétricas, hallar $\mathcal{S}^\perp$.

Ejercicio 8. Sea V un espacio vectorial y $\langle\, ,\rangle_1$ y $\langle\, ,\rangle_2$ dos productos internos definidos en él que verifican:

$$\langle v,w\rangle_1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \langle v,w\rangle_2 = 0 \;\; \forall v,w \in V.$$

Dado S un subespacio vectorial de V llamamos W_1 al complemento ortogonal de S con el producto interno $\langle\, ,\rangle_1$ y W_2 al complemento ortogonal de S con el producto interno $\langle\, ,\rangle_2$.

1. Probar que $W_1 = W_2$.
2. Probar que si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\langle v_i, v_i\rangle_2 = k\langle v_i, v_i\rangle_1 \;\; \forall i = 1,\dots,n$, donde $\{v_1,\dots,v_r\}$ es una base ortogonal de S y $\{v_{r+1},\dots,v_n\}$ es una base ortogonal de W_1, entonces
$$\langle v,w\rangle_2 = k\langle v,w\rangle_1 \;\; \forall v,w \in V.$$
3. Observar que para que la primer parte se cumpla alcanzaría con que
$$\langle v,w\rangle_1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \langle v,w\rangle_2 = 0 \;\; \forall w \in S \;\; \forall v \in V.$$
4. Ejemplificar las condiciones anteriores y verificar los resultados.

Ejercicio 9.
1. Sean V es un espacio vectorial con producto interno y S un subespacio vectorial de V. Si tomamos $\{s_1, s_2, \dots, s_r\}$ una base ortonormal de S y $\{s_1, s_2, \dots, s_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ una base ortonormal de V, probar que $\{v_{r+1},\dots,v_n\}$ es una base ortonormal de $S^{\perp}$.
2. Se considera $\mathbb{R}^3$ con el producto interno $\langle \vec{X}, \vec{Y}\rangle = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + \alpha x_3y_3 + x_1y_3 + x_3y_1$ si $\vec{X} = (x_1,x_2,x_3)$ y $\vec{Y} = (y_1,y_2,y_3)$.
   Sean los vectores $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,0,-1)$ y $v_3 = (0,0,1)$.
   a) Hallar α para que v_1 y v_2 sean ortogonales.
   En las partes siguientes se trabajará con el producto interno dado por el α hallado.
   b) Utilizar el método de Gram-Schmidt para hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ a partir de $\{v_1, v_2, v_3\}$.
   c) Hallar una base de $S^{\perp}$, si $S = [(1,1,1)]$.

Ejercicio 10. Considerando el producto interno usual en $\mathbb{R}^4$, sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un operador lineal, U y V dos subespacios vectoriales no triviales de $\mathbb{R}^4$ tales que

$$T_{|_U} = Id, \quad T_{|_V} = -Id, \quad N(T-2Id) = (U+V)^{\perp}, \quad rg(T-2Id) = 2.$$

1. Hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ formada por vectores propios de T.
2. Probar que T es invertible.
3. Sea $S : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $S = T^3 + 4T^{-1} + 2Id$. Probar que S es diagonalizable y calcular sus valores propios.
4. Si $\langle u,v\rangle = 0, \forall u \in U$ y $\forall\, v \in V$, ¿es posible hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ formada por vectores propios de T? Justificar.

2. Proyección ortogonal

Ejercicio 11. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con producto interno, $S \subset V$ un subespacio vectorial y $P_S(v)$ la proyección ortogonal de v sobre S; es decir $P_S(v)$ es el único vector que verifica que $P_S(v) \in S$ y $v - P_S(v) \in S^{\perp}$.
Probar que:

1. $P_S(s) = s \;\forall s \in S$.
2. $P_S(v) = \vec{0} \;\; \forall\, v \in S^{\perp}$.
3. La función $P_S : V \to V$ dada por $v \overset{P_S}{\mapsto} P_S(v)$ es una transformación lineal.

4. Hallar la matriz asociada de P_S en una base construída uniendo una base de S con una de $S^{\perp}$.
5. Hallar el núcleo y la imagen de P_S.
6. Hallar valores propios y subespacios propios de P_S, ¿Es P_S diagonalizable?
7. $||v||^2 = ||P_S(v)||^2 + ||P_{S^{\perp}}(v)||^2 \quad \forall v \in V$.
8. $||P_S(v)|| \leq ||v||$.
9. $\langle v, P_S(v)\rangle = ||P_S(v)||^2 \quad \forall v \in V$.

EJERCICIO 12. En cada caso, dado el producto interno, el subespacio S y el vector v, hallar $P_S(v)$.

1. En $\mathbb{R}^4$ con el producto interno habitual; $S = \big[(1,-1,1,1),(2,1,0,3)\big]$ y $v = (1,2,3,4)$.
2. En $\mathbb{R}^4$ con el producto interno habitual; $S = \big[(1,-1,1,1),(2,1,0,3)\big]$ y $v = (x,y,z,t)$ cualquiera.
3. En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno dado por
$$\big\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\big\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 4x_2y_2 + x_3y_3,$$
$S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, y - z = 0\big\}$ y $v = (1,-1,0)$.
4. En $\mathbb{C}^3$ con el producto interno usual; $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 : \ x + (1+i)y - z = 0\}$ y $v = (0,1,i)$.

EJERCICIO 13. En los siguientes casos consideramos los productos internos usuales.

1. Sea $P_S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la proyección ortogonal sobre el plano $S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x - 2y + z = 0\big\}$. Hallar la matriz asociada a P_S en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$.
2. Hallar la matriz asociada en la base canónica de la proyección (en $\mathbb{R}^2$), sobre la recta $y = 3x$.

EJERCICIO 14. Consideramos en $\mathbb{R}_3[t]$ el producto interno dado por $\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\, dt$.

1. Hallar una base ortonormal del subespacio $\mathbb{R}_2[t] \subset \mathbb{R}_3[t]$.
2. Hallar la proyección ortogonal del polinomio $p : p(t) = t^3$ sobre el subespacio $\mathbb{R}_2[t]$.
3. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que
$$F(a,b,c) = \int_{-1}^{1} (at^2 + bt + c - t^3)^2 \, dt$$
Hallar el mínimo de F en $\mathbb{R}^3$.
<u>Nota</u>: Resolverlo como un problema de proyección.

EJERCICIO 15. En el espacio $C[-\pi,\pi]$ con el producto interno $\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$:

1. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt al conjunto $\{1, \cos t, \sin t\}$.
2. Sea S el subespacio de $C[-\pi,\pi]$ generado por B. Hallar el elemento de S más próximo a la función $f(t) = t$.