Universidad de la República | **Geometría y Álgebra Lineal 2**
Facultad de Ingeniería - IMERL | **Segundo semestre 2024**

PRÁCTICO 5: PRODUCTO INTERNO Y NORMA INDUCIDA. ORTOGONALIDAD.

1. Producto interno y norma inducida

EJERCICIO 1. En cada caso, probar que $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ es un producto interno en V.

1. $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\langle (x,y,z),(x',y',z')\rangle = xx' + 2yy' + 3zz'$.
2. $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\langle A, B\rangle = tr\left(AB^t\right)$.
   ¿Cómo ajustaría este producto interno para que funcione para las matrices complejas?
3. $V = \mathbb{C}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ Si $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, entonces $\langle X, Y\rangle = X^t A \overline{Y}$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}$ (observe que X^t es un vector fila e $\overline{Y}$ es el vector columna conjugado de Y).

EJERCICIO 2. En cada caso, probar que $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ **no** es un producto interno en V.

1. $V = \mathbb{R}_3[x]$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\langle p, q\rangle = p(1)q(1)$.
2. $V = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\langle (x,y),(x',y')\rangle = x\,|x'| + y\,|y'|$.
3. $V = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\langle (a,b),(c,d)\rangle = ac - bd$.
4. $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\langle A, B\rangle = tr\,(A + B)$.
5. $V = C[0,1]$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $\langle f, g\rangle = \int_0^{1/2} f(t)g(t)dt$.

EJERCICIO 3. Indicar si las siguientes afirmaciones sobre un espacio vectorial con producto interno son verdaderas o falsas.

1. Un producto interno es lineal en ambas componentes.
2. $\langle v_1 + v_2, w_1 + w_2\rangle = \langle v_1, w_1\rangle + \langle v_2, w_2\rangle \ \forall\ v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$.
3. Si $\langle v, w\rangle = 0 \ \forall\ w \in V$, entonces $v = \mathbf{o}$.

EJERCICIO 4. Sea $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ un producto interno cualquiera.
Probar que:

$$\begin{aligned} \langle \vec{X}, \vec{Y}\rangle &= a_{11}x_1y_1 + \cdots + a_{1n}x_1y_n \\ &\quad + a_{21}x_2y_1 + \cdots + a_{2n}x_2y_n \\ &\quad \vdots \\ &\quad + a_{n1}x_ny_1 + \cdots + a_{nn}x_ny_n, \end{aligned}$$

siendo $\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ y $a_{ij} \in \mathbb{R}\ \forall i, j = 1, \ldots, n$.

Concluir que $\langle \vec{X}, \vec{Y}\rangle = \vec{X}^t A \vec{Y}$ con $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
¿Cuál producto interno se define si se considera que A es la matriz identidad?

Ejercicio 5. Sea V un espacio vectorial real con producto interno y $\| \quad \| : V \to \mathbb{R}$ la norma inducida por él.

1. Probar que
$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 \qquad \forall\, v, w \in V. \quad (\textit{Regla del paralelogramo}).$$
2. Probar que
$$4\langle v, w\rangle = \|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 \qquad \forall\, v, w \in V. \quad (\textit{Polarización}).$$
3. Analice cuál de las dos propiedades anteriores sigue valiendo en un espacio vectorial complejo.

Ejercicio 6.
1. Sea $V = \mathbb{C}^3$ con el producto interno habitual. Se consideran los vectores $v = (2, 1{+}i, i)$ y $w = (2{-}i, 2, 1{+}2i)$. Calcular $\langle v, w\rangle$, $\|v\|^2$, $\|w\|^2$ y $\|v+w\|^2$. Verificar la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad triangular para estos vectores.
2. Sea $V = C[0,1]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Se consideran $f(t) = t$ y $g(t) = e^t$. Calcular $\langle f, g\rangle$, $\|f\|^2$, $\|g\|^2$ y $\|f+g\|^2$. Verificar la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la desigualdad triangular para estos vectores.

2. Conjuntos ortogonales y ortonormales

Ejercicio 7. En un espacio vectorial real con producto interno y considerando su norma inducida, probar que si $v+w$ y $v-w$ son ortogonales entonces v y w tienen la misma norma.

Ejercicio 8. Sea V un espacio vectorial real con producto interno. Probar que si u y v son ortogonales, entonces $\|u + \lambda v\| \geq \|u\| \ \ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 9.
1. Se considera $\mathbb{R}^4$ con el producto interno habitual.
Hallar una base ortonormal del subespacio $S = \big[(1,1,0,0), (1,1,1,1), (-1,0,2,1)\big]$.
2. Se considera $\mathbb{C}^3$ con el producto interno habitual.
Hallar una base ortonormal del subespacio $S = \big[(1,i,0), (1,1,1)\big]$.

Ejercicio 10. Sea A en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Probar que si las columnas de A forman un conjunto ortonormal de vectores de $\mathbb{R}^m$ con el producto interno habitual, entonces $A^tA = I_n$.

Ejercicio 11. Hallar un producto interno en V para el cual la base $\mathcal{B}$ resulta ser ortonormal:

1. $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \big\{(1,1), (2,-1)\big\}$.
2. $V = \mathbb{C}^2$, $\mathcal{B} = \big\{(1,i), (-1,i)\big\}$.
3. $V = \mathbb{C}^3$, $\mathcal{B} = \big\{(1,i,1), (0,0,1), (0,1,i)\big\}$.

Ejercicio 12. Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V, espacio vectorial real con producto interno.

Si se cumple que $\langle w, w\rangle = \sum\limits_{i=1}^n a_i^2 \quad \forall w = \sum\limits_{i=1}^n a_i v_i \in V$, probar que $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base ortonormal de V.

Ejercicio 13. En un espacio vectorial con producto interno y considerando su norma inducida, probar que si $\{u_1, ..., u_n\}$ es una base ortogonal, entonces

1. $v = \frac{\langle v,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 + \cdots + \frac{\langle v,u_n\rangle}{\|u_n\|^2}u_n$.
2. $\langle v, w\rangle = \frac{\langle v,u_1\rangle\langle u_1,w\rangle}{\|u_1\|^2} + \cdots + \frac{\langle v,u_n\rangle\langle u_n,w\rangle}{\|u_n\|^2}$.

EJERCICIO 14. Considere $V = \mathbb{R}_2[t]$, el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 2, con el producto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt.$$

A partir de la base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ construya una base ortonormal de V usando el método de Gram-Schmidt.