

Cálculo diferencial e integral en una variable, segundo semestre 2024

Departamento de Matemática y Aplicaciones;
Cure–Universidad de la República

TEMA: LÍMITES. DERIVADA Y REGLA DE LA CADENA

§1. Cálculo de derivadas.

Hallar las derivadas de las siguientes funciones, justificando los pasos dados al tomar límites por medio de las tres propiedades:

(a) $f(x) = 2x^3 + 3x$

(b) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$

(c) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

(d) $f(x) = x(x+1)$

(e) $f(x) = \frac{x}{2x-1}$

(f) $f(x) = 3x^2$

(g) $f(x) = x^4$

(h) $f(x) = 2x^3$

§2. Derivadas de potencias.

(a) Escribir el desarrollo de $(x+h)^n$ en términos de potencias de x y h .

(b) Hallar la derivada de la función x^4 directamente, usando el cociente de Newton.

(c) ¿Cuáles son las derivadas de las siguientes funciones?

(i) $x^{2/3}$

(ii) $x^{-3/2}$

(iii) $x^{7/6}$

(d) ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^9$ en el punto $(1, 1)$?

(e) ¿Cuál es la pendiente de la curva $y = x^{2/3}$ en el punto $(8, 4)$? ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en ese punto?

(f) Hallar la pendiente y la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^{-3/4}$ en el punto cuya abscisa es $x = 16$.

(g) Hallar la pendiente y la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \sqrt{x}$ en el punto de abscisa $x = 3$.

(h) Hallar las derivadas de las siguientes funciones en los puntos indicados:

(i) $f(x) = x^{1/4}$ en $x = 5$

(ii) $f(x) = x^{-1/4}$ en $x = 7$

(iii) $f(x) = x^{1/2}$ en $x = 10$

(iv) $f(x) = x^x$ en $x = 7$

§3. Derivadas de sumas, productos y cocientes.

Hallar las derivadas de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = x^{1/3}$

(b) $f(x) = 4x^5$

(c) $f(x) = \sqrt[4]{x^3}$

(d) $f(x) = x^2 + 4x^2$

(e) $f(x) = 25x^{-1} + 12x^{1/2}$

(f) $f(x) = \frac{1}{x^2} - 2x$

(g) $f(x) = (x^3 + x)(x - 1)$

(h) $f(x) = (2x^2 - 1)(x^4 + 1)$

(i) $f(x) = (x + 1)(x^2 + 5x^{3/2})$

(j) $f(x) = (2x - 5)(3x^4 + 5x + 2)$

(k) $f(x) = (x^{-2/3} + x^2)(x^3 + 7)$

(l) $f(x) = (2x + 3)\left(\frac{1}{x} + 1\right)$

(m) $f(x) = \frac{2x+1}{x+5}$

(n) $f(x) = 2x^3 + 3x + 1$

(a) $f(t) = \frac{t+2}{t-1}$

(b) $f(t) = \frac{t^{-5/4}}{(t+1)(t-1)}$

(c) ¿Cuál es la pendiente de la curva $y = t^{-2} + 5$ en el punto $t = 2$? ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente en ese punto?

(d) ¿Cuál es la pendiente de la curva $y = \sqrt{2t+1}$ en $t = 1$? ¿Cuál es la ecuación de la recta tangente?

§4. Regla de la cadena.

En cada caso en que sea aplicable, hallar dos funciones $g(u)$ y $f(x)$ tales que la función dada sea del tipo $g(f(x))$. Hallar la derivada de la función indicada. No debe intentarse simplificar las respuestas.

- (a) $(x + 1)^8$
- (b) $(2x - 5)^{1/2}$
- (c) $(\sin x)^3$
- (d) $(\log x)^5$
- (e) $\sin 2x$

- (a) $\log(2x + 3)$
- (b) $\cos(\log 2x)$
- (c) $\sin[\cos(x + 1)]$
- (d) $\sin[(2x + 5)^{1/2}]$
- (e) $\sin(e^x)$
- (f) $\frac{1}{(4x)^3}$

- (a) $(x^2 + 1)^{e^x}$
- (b) $\frac{1}{\sin x + \cos x}$
- (c) $\frac{\log x}{x^2 + 3}$
- (d) $\frac{x^3 + 1}{x - 1}$
- (e) $(x^{4/3} - e^x)(2x + 1)$

- (a) $\frac{x + 1}{\cos 2x}$
- (b) $(x^3 - 1)(e^{3x} + 5x)$
- (c) $\frac{x^2 - 1}{2x + 3}$

- (f) $\log(x^2 + 1)$
- (g) $\cos(e^x)$
- (h) $\log(e^x + \sin x)$
- (i) $\frac{x + 1}{\sin 2x}$
- (j) $\cos(\sin 5x)$

- (g) $\frac{(3x - 1)^4}{\sin^2(2x)}$
- (h) $\frac{1}{(\cos 2x)^2}$
- (i) $\sin 3x$
- (j) $(\sin x)(\cos x)$

- (f) $\sin(x^2 + 5x)$
- (g) $\frac{1}{\log(x^4 + 1)}$
- (h) $\frac{2x}{e^x}$
- (i) $(x^3 + 2x)(\sin 3x)$
- (j) $\frac{\sin 2x}{e^x}$

- (d) $(\sin 3x)(x^{1/4} - 1)$
- (e) $e^{3x^2 + 8}$
- (f) $\frac{1}{\log(x^{1/2} + 2x)}$