

PRÁCTICO 4: SUBESPACIOS INVARIANTES. FORMA CANÓNICA DE JORDAN.

1. Subespacios invariantes

EJERCICIO 1. Si  $T : V \rightarrow V$  es una transformación lineal y  $S \subset V$  es un subespacio de  $V$ , decimos que  $S$  es un *subespacio invariante bajo  $T$*  (o  $T$ -invariante) si  $T(s) \in S$  para todo vector  $s \in S$ .

Probar que  $V, \{0_V\}, N(T)$  e  $Im(T)$  son subespacios invariantes bajo  $T$ .

EJERCICIO 2. Sea  $T : V \rightarrow V$  una transformación lineal.

1. Si  $W_1$  y  $W_2$  son subespacios de  $V$  invariantes bajo  $T$ , probar que  $W_1 \cap W_2$  y  $W_1 + W_2$  son dos subespacios invariantes bajo  $T$ .
2. Probar que si  $\lambda$  es valor propio de  $T$ , entonces el subespacio propio  $S_\lambda$  es un subespacio invariante bajo  $T$ .
3. Probar que si  $\lambda$  es valor propio de  $T$  y  $W = [v_1, v_2]$ , con  $v_1 \in S_\lambda$  y  $T(v_2) = v_1$ , entonces  $W$  es un subespacio invariante bajo  $T$ .
4. Si  $W$  es un subespacio de  $V$  invariante bajo  $T$  y  $dim(W) = 1$ .
  - a) Probar que los vectores no nulos de  $W$  son vectores propios de  $T$ .
  - b) ¿ $W$  es un subespacio propio  $T$ ? Justifique la respuesta.
5. Sea  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una transformación lineal tal que los subespacios  $W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - z = 0\}$ ,  $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$  y  $W_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 2z = 0\}$  son invariantes bajo  $T$ .
  - a) Probar que  $T$  es diagonalizable.
  - b) Sabiendo que  $2T - T^2 = Id$  en  $W_1$  y  $T = 2Id$  en  $W_2 \cap W_3$ , hallar los valores propios de  $T$ .

EJERCICIO 3. Dada la matriz asociada a  $T$  en la base canónica de  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hallar los subespacios invariantes de  $T$  así como sus valores propios y discutir según  $\theta$  cuando  $T$  es diagonalizable.

2. Forma canónica de Jordan

EJERCICIO 4. Hallar la forma y una base de Jordan para las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 5. Hallar la forma y una base de Jordan de los siguientes operadores:

1.  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que:  $T(x, y, z) = (-y - 2z, x + 3y + z, x + 3z)$ .
2.  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que:  $T(x, y, z) = (3x + 2y - 2z, 4y - z, y + 2z)$ .

EJERCICIO 6. Probar que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ na^{n-1} & a^n \end{pmatrix}$  y calcular  $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{10}$ .

EJERCICIO 7. Sea  $M$  una matriz con entradas reales  $4 \times 4$ , cuyo polinomio característico tiene raíces 3 y 5 con  $ma(3) = ma(5) = 2$ .

¿Cuáles de las siguientes matrices pueden ser  $M$ ?

$$(I) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad (II) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (III) \begin{pmatrix} 20 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 8. ¿La matriz  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & a & b \\ 0 & 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  es diagonalizable? Discutir según  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

En caso de ser diagonalizable indicar su forma diagonal  $D$  y una matriz  $P$  para la cual  $A = P^{-1}DP$ . En caso de no ser diagonalizable, hallar su forma canónica de Jordan.

EJERCICIO 9. Sea  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}$  matriz **real** ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ) con  $a \in \mathbb{R}$ .

1. Discutir según  $a$  si  $A$  es diagonalizable. Justificar con cuidado.
2. Para los casos en que  $A$  no es diagonalizable y  $|a| \geq 2$  hallar su forma canónica de Jordan. Justificar.

EJERCICIO 10. Probar que dos matrices  $A$  y  $B$  en las hipótesis del Teorema de Jordan son semejantes si, y solo si, tienen la misma forma de Jordan (a menos del orden en el que se presentan los bloques de Jordan).

EJERCICIO 11. ¿Las matrices  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  son semejantes?

EJERCICIO 12. Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión 6 y  $T : V \rightarrow V$  una transformación lineal que cumple lo siguiente:

- El polinomio característico de  $T$  tiene todas sus raíces en el cuerpo,
- El polinomio  $(t - 2)^3$  divide al polinomio característico de  $T$ ,
- $N(T - 3Id) \neq \{\mathbf{0}\}$ ,
- La multiplicidad algebraica de 4 es mayor que 1.

Calcular la traza de  $T$ .

EJERCICIO 13. Sea  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $T(1, 1, 0) = T(-1, 0, 1) = (2, -2, 0)$  y  $T(0, -1, 1) = (-6, 2, -4)$ .

1. Indicar si  $T$  es diagonalizable y hallar una posible base de Jordan.
2. Indicar todos los subespacios invariantes bajo  $T$  de dimensión 1.
3. ¿Existen subespacios invariantes bajo  $T$  de dimensión 2? En caso de existir indicar al menos uno de ellos.

EJERCICIO 14. Hallar una base de Jordan para el operador  $S : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  definido por:

$$S(x, y, z, t) = (2y, -2x + 4y, z + t, z + t).$$