Universidad de la República **Geometría y Álgebra Lineal 2**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Segundo semestre 2024**

PRÁCTICO 3: TEOREMA DE GERSCHGORIN.

EJERCICIO 1. Sea A una matriz <u>real</u> $n \times n$ tal que $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j = \emptyset \quad (i \neq j)$, donde $\mathcal{C}_i$ son los círculos de Gerschgorin de A $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Probar que todas las raíces del polinomio característico de A son reales y distintas.

EJERCICIO 2.

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 14 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -9 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -20 \end{pmatrix}$.

1. Probar que A es diagonalizable.
2. Determinar el signo de los valores propios de A y deducir que es invertible.

EJERCICIO 3.

1. Investigar si la matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.
2. Probar, usando el teorema de Gerschgorin, que la matriz $B = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

EJERCICIO 4.

1. Utilice el Teorema de Gerschgorin para acotar los valores propios de
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -10^{-5} & 2 \times 10^{-5} \\ 4 \times 10^{-5} & 0,5 & -3 \times 10^{-5} \\ -10^{-5} & 3 \times 10^{-5} & 0,1 \end{pmatrix}.$$
2. Sea $S = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.
Hallar los círculos de Gerschgorin de la matriz $S^{-1}AS$
3. Hallar α de modo que el radio r_1 del círculo con centro en $(S^{-1}AS)_{1,1}$ sea tan pequeño como sea posible sin que este círculo se interseque con los otros dos círculos.
4. Localice el valor propio λ_1 de la matriz A en un círculo tan pequeño como sea posible. (Observar que los valores propios de A y $S^{-1}AS$ son los mismos).
5. Utilice matrices análogas a S para obtener mejores aproximaciones de λ_2 y λ_3.

EJERCICIO 5. Sea $A = \begin{pmatrix} 15+3i & 1 & 1 \\ 2 & 7-4i & 1 \\ 1 & 2 & -5-5i \end{pmatrix}$.

Justificar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. A es diagonalizable.
2. A es invertible.
3. A tiene al menos un valor propio real.

EJERCICIO 6. ¿El Teorema de Gerschgorin permite determinar si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ -3/2 & -1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable? Justificar.