

Cálculo diferencial e integral en una variable, segundo semestre 2024

Departamento de Matemática y Aplicaciones;
Cure-Universidad de la República

TEMA: FUNCIONES

§1. Dominio de funciones y cálculo de valores funcionales.

- (a) Sea $f(x) = 2x + x^2 - 5$. Decir qué representan:
- (i) $f(1)$
 - (ii) $f(-1)$
 - (iii) $f(x + 1)$
 - (iv) $f(-1)$
 - (v) $f(-5)$
- (b) Sea de nuevo $f(x) = \frac{1}{x}$. ¿Qué representa $f(2x + 1)$ para cualquier número x tal que $x \neq -\frac{1}{2}$?
- (c) Sea $g(x) = |x| - x$. ¿Qué representan $g(1)$, $g(-1)$, $g(-\frac{5}{4})$?
- (d) ¿Para qué números podría definirse una función $f(x)$ por la fórmula $f(x) = \sqrt[3]{x}$? ¿Cuál es el valor de esta función para $x = 5$?
- (e) Sea $f(x) = \frac{x}{|x|}$, definida para $x \neq 0$. ¿Qué representan:
- (i) $f(1)$
 - (ii) $f(2)$
 - (iii) $f(-3)$
- (f) Sea $f(x) = x + |x|$. Decir qué representan:
- (i) $f(1)$
 - (ii) $f(2)$
 - (iii) $f(-4)$
- (g) Sea $f(x) = 2x + x^2 - 5$. Decir qué representan:
- (i) $f(1)$
 - (ii) $f(-1)$
 - (iii) $f(x + 1)$
 - (iv) $f(-\frac{1}{2})$
 - (v) $f(-5)$
- (h) ¿Para qué números se puede definir una función $f(x)$ por la fórmula $f(x) = \sqrt[3]{x}$? ¿Qué representa $f(16)$?
- (i) Se dice que una función (definida para todos los números) es una función par si $f(x) = f(-x)$ para todo x . Se dice que es una función impar si $f(x) = -f(-x)$ para todo x . Determinar cuáles de las siguientes funciones son pares o impares:
- (i) $f(x) = x$
 - (ii) $f(x) = x^2$
 - (iii) $f(x) = x^3$
 - (iv) $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, y $f(0) = 0$
- (j) Sea f una función cualquiera definida para todos los números. Demostrar que la función $g(x) = f(x) + f(-x)$ es par. ¿Qué podemos decir de la función $h(x) = f(x) - f(-x)$, es par, impar o ninguna de las dos cosas?
- (k) Demostrar que cualquier función definida para todos los números puede escribirse como la suma de una función par y una función impar.

§2. Potencias.

Hallar a^x y x^a para los siguientes valores de a y x .

- (a) $a = 2$ y $x = 3$
- (b) $a = 5$ y $x = -1$
- (c) $a = 21$ y $x = 4$
- (d) $a = -12$ y $x = 4$
- (e) $a = 3$ y $x = 2$
- (f) $a = -3$ y $x = -1$
- (g) $a = -2$ y $x = -$
- (h) $a = -1$ y $x = -4$
- (i) $a = -21$ y $x = 9$

§3. Gráficas.

Trazar las gráficas de las siguientes funciones y marcar al menos tres puntos sobre cada gráfica.

(a) $f(x) = x + 1$

(b) $f(x) = 2x$

(c) $f(x) = 3x$

(d) $f(x) = 4x$

(e) $f(x) = 2x + 1$

(f) $f(x) = 5x + 1$

(g) $f(x) = 7x + 3$

(h) $f(x) = -3x + 2$

(i) $f(x) = 2x^2 - 1$

(j) $f(x) = -3x^2 + 1$

(k) $f(x) = \sqrt{x}$

(l) $f(x) = x^{-1/2}$

(m) $f(x) = 2x + 1$

(n) $f(x) = x + 3$

(o) $f(x) = |x| + x$

(p) $f(x) = |x| + 2x$

(q) $f(x) = \frac{1}{x-3}$

(r) $f(x) = -\frac{1}{x+3}$

(s) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

(t) $f(x) = \frac{1}{x+1}$

(u) $f(x) = -\frac{1}{x}$

(v) $f(x) = \frac{1}{x+5}$

(w) $f(x) = \frac{1}{x-7}$

Funciones Especiales.

(a) Trazar la gráfica de la función $f(x)$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

(b) Trazar la gráfica de la función $f(x)$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0, \\ 2 & \text{si } x = 0, \\ x & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

(c) Trazar la gráfica de la función $f(x)$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0, \\ x & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

(d) Trazar la gráfica de la función $f(x)$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} |x| + x & \text{si } -1 \leq x \leq 1, \\ 3 & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

(e) Trazar la gráfica de la función $f(x)$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 0, \\ 1 & \text{si } 0 < x < 2, \\ x^2 & \text{si } x = 2, \end{cases}$$

(f) Trazar la gráfica de la función $f(x)$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ x - 1 & \text{si } 1 < x \leq 2, \\ x - 2 & \text{si } 2 < x \leq 3, \\ -x - 3 & \text{si } 3 < x \leq 4, \end{cases}$$

[Dejamos $f(x)$ indefinida para otros valores de x , pero el lector debe intentar definirla por sí mismo, de forma que se preserve la simetría de la gráfica.]

§4. Distancia entre dos puntos.

Hallar la distancia entre los siguientes puntos:

(a) Los puntos $(-3, -5)$ y $(1, 4)$.

(b) Los puntos $(1, 1)$ y $(0, 2)$.

(c) Los puntos $(-1, 4)$ y $(3, -2)$.

(d) Los puntos $(1, -1)$ y $(-1, 2)$.

(e) Los puntos $(\frac{1}{2}, 2)$ y $(\frac{1}{2}, 1)$.

(f) Hallar las coordenadas del cuarto vértice de un rectángulo, tres de cuyos vértices son $(-1, 2)$, $(4, 2)$, $(-1, -3)$.

§5. Curvas y ecuaciones.

Trazar la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones:

- (a) (i) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 25$
- (ii) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$
- (b) (i) $x^2 + (y - 1)^2 = 9$
- (ii) $x^2 + (y - 1)^2 = 25$
- (c) (i) $(x + 1)^2 + y^2 = 1$
- (ii) $(x + 1)^2 + y^2 = 9$
- (iii) $(x + 1)^2 + y^2 = 4$
- (iv) $(x + 1)^2 + y^2 = 25$
- (d) (i) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$
- (ii) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$

Trazar la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones:

- (a) $y = \frac{1}{x} - 1$
- (b) $y = 2x^2 + x - 3$
- (c) $x = 4y^2$
- (d) $x - y^2 + y + 1 = 0$
- (a) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$
- (b) $x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$
- (c) $x^2 + y^2 + 2x - 2 = 0$
- (d) $y - 2x^2 - x + 3 = 0$
- (e) $y - x^2 - 4x - 5 = 0$
- (f) $y - x^2 + 2x + 3 = 0$
- (g) $x^2 + y^2 + 2x - 4y = -3$
- (h) $x^2 - y^2 - 4x - 2y = -3$
- (i) $x - 2y^2 - y + 3 = 0$
- (j) $x - y^2 - 4y = 5$

Trazar las gráficas de las siguientes ecuaciones:

- (a) $(x - 1)(y - 2) = 2$
- (b) $x(y + 1) = 3$
- (c) $xy - 4 = 0$
- (d) $y = \frac{1}{x+1}$
- (e) $(x - 1)(y + 1) = 2$
- (f) $y = \frac{4x-7}{2x+1}$
- (g) $y = \frac{x-1}{x+1}$
- (h) $y = x - 1$
- (i) $y = x + \sqrt{x+1}$