PRÁCTICO 2: VALORES Y VECTORES PROPIOS. DIAGONALIZACIÓN.

Notación: $\mathbb{R}_n[x]$ denotará el espacio de polinomios de grado menor o igual que n y variable x. $\mathbb{K}$ denotará el cuerpo $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ denotará el espacio de matrices con coeficientes en $\mathbb{K}$, m filas y n columnas. $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

1. Valores y vectores propios

EJERCICIO 1. Dadas las siguientes transformaciones lineales

$$\begin{array}{ll} T:\mathbb{K}^2\to\mathbb{K}^2 & T(x,y) = (\ -2x-7y,\ x+2y\ ), \\ T:\mathbb{K}^3\to\mathbb{K}^3, & T(x,y,z) = (\ x,\ z,\ y\ ), \\ T:\mathbb{K}^3\to\mathbb{K}^3, & T(x,y,z) = (\ x,\ z,\ -y\ ). \end{array}$$

1. Hallar valores propios y bases de los subespacios propios de T, si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$.
2. Hallar valores propios y bases de los subespacios propios de T, si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$.

EJERCICIO 2. Hallar los valores propios y bases de los subespacios propios de la transformación lineal $T:\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4a+b+d & 2a+3b+d \\ -2a+b+2c-3d & 2a-b+5d \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 3. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y la transformación lineal $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ tal que ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}} = A$, donde $\mathcal{B} = \{(1,0,0),\ (1,1,0),\ (1,1,1)\}$.

1. Hallar los valores propios y los subespacios propios de A.
2. Hallar los valores propios y los subespacios propios de T.

EJERCICIO 4. Sea $T:V\to V$ una transformación lineal. Probar que:

1. T es invertible $\Leftrightarrow$ 0 no es valor propio de T.
2. Si T es invertible y λ es valor propio de T $\Rightarrow$ λ^{-1} es valor propio de T^{-1}.
3. Si λ es valor propio de T $\Rightarrow$ λ^n es valor propio de T^n $\forall\, n\in\mathbb{N}$.
4. Si T es invertible y λ es valor propio de T $\Rightarrow$ λ^{-n} es valor propio de T^{-n} $\forall\, n\in\mathbb{N}$.
   Nota: Existen resultados análogos para matrices cuadradas.

EJERCICIO 5. Sea A una matriz $n\times n$.

1. Probar que A y A^t tienen el mismo polinomio característico.
2. Deducir que A y A^t tienen los mismos valores propios.
3. ¿ A y A^t tienen los mismos vectores propios?

EJERCICIO 6. Sean A y B dos matrices $n\times n$ semejantes.

1. Probar que A y B tienen el mismo polinomio característico.
2. Deducir que A y B tienen los mismos valores propios.
3. ¿Qué relación existe entre los vectores propios de A y B?

2. Diagonalización

Ejercicio 7. Para las siguientes transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, hallar los valores propios, hallar bases de los subespacios propios e investigar si son diagonalizables.

1. $T(x, y, z) = (2y + z, 2x + z, x + y + z)$.
2. $T(x, y, z) = (4x - 5y + 2z, 5x - 7y + 3z, 6x - 9y + 4z)$.
3. $T(x, y, z) = (y, -4x + 4y, 2x + y + 2z)$.
4. $T(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$.

Ejercicio 8. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1-i \\ 1+i & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1+i \\ 0 & -1-i & 0 \end{pmatrix}$$

1. Hallar los valores propios y las bases de los subespacios propios de cada una de ellas.
2. Deducir que cada una de ellas es diagonalizable.
3. Hallar la matriz diagonal D semejante a la matriz dada y la matriz de semejanza (P matriz invertible tal que $A = PDP^{-1}$).

Ejercicio 9. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2-a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

hallar los valores reales de a y b para que la matriz sea diagonalizable.

Ejercicio 10. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que su matriz asociada en la base canónica es simétrica. Probar que T es diagonalizable.

3. Otros ejercicios de diagonalización

Ejercicio 11. Sea $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida como $T(M) = M + aM^t$ con $a \in \mathbb{R}$.

A. Hallar los valores y subespacios propios de T discutiendo según a.
B. Hallar los valores de a para los cuales T es invertible.
C. Hallar los valores de a para los cuales T es diagonalizable y hallar su forma diagonal.
D. Para $a = 1$, observar que es diagonalizable y hallar una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formada por vectores propios de T.

Ejercicio 12. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ definida como $T(p) = 2p' + p$.

A. Hallar los valores y subespacios propios de T.
B. Investigar si T es diagonalizable y si lo es hallar su forma diagonal y una base de $\mathbb{R}_2[x]$ formada por vectores propios de T.

Ejercicio 13. Sea $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida como $T(B) = BA - AB$ con $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

A. Hallar los valores y subespacios propios de T.
B. Investigar si T es diagonalizable y si lo es hallar su forma diagonal y una base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ formada por vectores propios de T.

Ejercicio 14. Sea $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ una transformación lineal tal que:

$$\begin{aligned} T(1) &= 4+4x^2,\\ T(x) &= -1+2x-3x^2,\\ T(x^2) &= b \quad \text{con} \quad b\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

A. Determinar los valores de b para los cuales T es diagonalizable. Justificar
B. Para $b=3$, observar que T es diagonalizable, hallar su forma diagonal y una base de $\mathbb{R}_2[x]$ formada por vectores propios de T.

Ejercicio 15. Sea $T:\mathbb{R}_3[x]\to\mathbb{R}_3[x]$ definida como $T(p(x)) = 2p(x)+p'(x)+p''(x)+p'''(x)$.

A. Hallar los valores y subespacios propios de T.
B. ¿Es T diagonalizable? En caso afirmativo hallar su forma diagonal y una base de $\mathbb{R}_3[x]$ formada por vectores propios de T.

Ejercicio 16. Sean V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita y $T:V\to V$ una transformación lineal con tres valores propios $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$ y $S_{\lambda_1},\ S_{\lambda_2},\ S_{\lambda_3}$ los respectivos subespacios propios.

1. Sabiendo que $T=T^3$, hallar $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$.
2. Sea $v\in V$, probar que
   a) $\frac{1}{2}T^2(v)-\frac{1}{2}T(v)\in S_{\lambda_1}$.
   b) $v-T^2(v)\in S_{\lambda_2}$.
   c) $\frac{1}{2}T(v)+\frac{1}{2}T^2(v)\in S_{\lambda_3}$.
3. Probar que $V=S_{\lambda_1}\oplus S_{\lambda_2}\oplus S_{\lambda_3}$.
4. Probar que T es diagonalizable.
5. Si $dim(V)=4$, hallar las posibles matrices diagonales asociadas a T.

Ejercicio 17. Se considera la transformación lineal $T:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ que representa una simetría respecto el plano $\pi=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\quad x+5y-13z=0\}$.

1. Probar que T es diagonalizable.
2. Calcular el determinante de la matriz asociada a T en las bases canónicas.

Ejercicio 18. Probar que una matriz cuyas filas suman siempre el mismo número tiene vector propio $(1,\dots,1)^t$. Diagonalizar las matrices A y B en $\mathcal{M}_6(\mathbb{R})$ (hallar la matriz diagonal y la matriz de semejanza).

$$A=\begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 2&1&2&1&2&1\\ 1&2&1&2&1&2\\ 2&1&2&1&2&1\\ 1&2&1&2&1&2\\ 2&1&2&1&2&1\\ 1&2&1&2&1&2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 19. Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z)=(-7y+z,4y,-2x+y+3z)$.

1. Probar que T es diagonalizable.
2. Calcular $\begin{pmatrix} 0&-7&1\\ 0&4&0\\ -2&1&3 \end{pmatrix}^n, \forall n\in\mathbb{N}$.

3. Hallar, si es posible, una matriz F en $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $F^2 = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, calcular A^{-1}, A^5 y A^{-5}.