Cálculo diferencial e intelgral en una variable, segundo semestre 2024

Departamento de Matemática y Aplicaciones;
Cure–Universidad de la República

Tema: Misceláneo, operatoria

§1. Cálculo de fracciones. Calcular expresando el resultado final como una fracción con el numerador y denominador sin factores comunes y decidir si las igualdades escritas son verdaderas o falsas.

(a) (i) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$, (ii) $2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)$, (iii) $\frac{1/2}{1/3}$, (iv) $\frac{1/2}{2}$, (v) $\frac{2}{1/2}$;

(b) (i) $\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$, (ii) $\frac{4+1}{6+1}=\frac{2}{3}$, (iii) $\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3}$, (iv) $\frac{7}{6}=\frac{7/2}{3}$, (v) $\frac{8}{1/2}=\frac{4}{1}=4$, (vi) $\frac{a}{a+1}=\frac{a}{a}+\frac{a}{1}=1+a=\frac{1}{1+\frac{1}{a}}$;

(c) (i) $\frac{4}{3}=1,333\cdots$, (ii) $8=7,999\cdots$, (iii) $15/7=2,142857142857\cdots$, (iv) $\frac{1+a}{2+a}=\frac{1}{2}$;

(d) (i) $\frac{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{5}(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})\right)}{5}$, (ii) $\frac{1/4+1/3}{2/5}-\frac{7}{6}(1/2+5/8)$, (iii) $\frac{4/5-1/3(3/4-1/2)}{2/3}$, (iv) $\frac{3}{2}\left(4+\frac{5}{7/3-6/5}\right)$.

§2. Trabajo con paréntesis. Decidir si las igualdades escritas abajo son verdaderas o falsas. (i) $-2(-1+a)=-2+2a$, (ii) $(a+2)(b+1)=ab+2$, (iii) $3(2(-1+2a))=-5+10a$, (iv) $\frac{(a+1)a}{3a}=\frac{a}{3}+\frac{1}{3}$, (v) $(a+b)^2=a^2+b^2$, (vi) $(a+b)^2=a^2+b$, (vii) $(a+b)^2=a^2+ab+b^2$, (viii) $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+b$, (ix) $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

§3. Potencias y raíces. Decidir si las siguientes igualdades son verdaderas o falsas. (i) $(a^2)^3=a^5$, (ii) $(a^2)^3=a^6$, (iii) $(a^2)^{-1}=\sqrt{a}$, (iv) $(a^2)^{-1}=a^{-2}$, (v) $(a^2)^{-1}=\frac{1}{a^2}$, (vi) $\sqrt{a}=a^{-2}$, (vii) $\sqrt{a}=a^{1/2}$, (viii) $(\sqrt{a})^3=a^{3/2}$, (ix) $(\sqrt{a})^3=a^{3-2}$, (x) $a^2a^3=a^5$, (xi) $\frac{a^2}{a^3}=a^{2/3}$, (xii) $(-2)^3=8$, (xiii) $2^{-2}=-4$, (xiv) $(-2)^{-2}=1/4$.

§4. Media aritmética, media geométrica y media armónica. Dados dos números a,b positivos se definen a partir de ellos tres números por la siguientes fórmulas.

$$\begin{cases} M(a,b)=\dfrac{a+b}{2}, & \text{media aritmética;}\\ G(a,b)=\sqrt{ab}, & \text{media geométrica;}\\ H(a,b)=\dfrac{2ab}{a+b}, & \text{media armónica.}\end{cases}$$

(a) Probar que $\frac{1}{H(a,b)}=M(1/a,1/b)$,(b) Probar que $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=a-2\sqrt{ab}+b$ y deducir que $M(a,b)\geq G(a,b)$,(c) Probar que $G(1/a,1/b)=1/G(a,b)$; (d) Usando (a) concluir que $G(a,b)\geq H(a,b)$.

§5. Parte entera de un número. Dado un número x, se define la parte entera de x, denotada mediante $\mathrm{E}(x)$, de la siguiente manera:

- Si $x\geq 0$, $\mathrm{E}(x)=n$ donde n es el único número entero que verifica $n\leq x<n+1$;
- Si $x<0$, $\mathrm{E}(x)=n$ donde n es el único número entero que verifica $n-1\leq x<n$.

(a) Hallar $\mathrm{E}(0),\mathrm{E}(1,2),\mathrm{E}(2),\mathrm{E}(-1),\mathrm{E}(-0,9)$;

(b) Dibujar el gráfico de $\mathrm{E}(x)$ en el intervalo $-2,5<x<2,5$.

§6. Sumatorias. Notación: dado un conjunto de números $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ la suma de todos ellos $a_1+a_2+\cdots+a_n$ se abrevia $\sum_{i=1}^n a_i$. También se pueden considerar las sumas parciales como $\sum_{i=1}^p a_i$ y $\sum_{i=p+1}^n a_i$ en el caso que $1\leq p\leq n$.

(a) Probar las siguientes igualdades. $\sum_{i=1}^n a_i=\sum_{i=1}^{n-1}a_i+a_n=\sum_{i=1}^{n-2}+a_{n-1}+a_n=\cdots=a_1+a_2+\cdots+a_n$;

(b) Si $a_n=2n+3$ calcular $\sum_{i=1}^3 a_i$;

(c) Lo mismo para $a_n=n^2-n$;

(d) Probar las siguientes propiedades. (i) Si $a_i=p$ para todo $1\leq i\leq n$ entonces $\sum_{i=1}^n a_i=np$; (ii) Si $a_i=pb_i$ para todo $1\leq i\leq n$ entonces $\sum_{i=1}^n a_i=p\sum_{i=1}^n b_i$; (iii) Si $a_i=b_i+c_i$ para todo $1\leq i\leq n$

entonces $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i + \sum_{i=1}^n c_i$; (iv) Propiedad telescópica. Suponiendo que $a_1 \leq a_2 \cdots \leq a_n$ entonces $\sum_{i=2}^n (a_i - a_{i-1}) = a_n - a_1$; (v) Como aplicación de la propiedad telescópica calcular la siguiente suma $\sum_{i=1}^n \dfrac{1}{i(i+1)} = 1/2 + 1/6 + 1/12 + \cdots + 1/(n-1)n + 1/n(n+1) = \dfrac{n}{n+1}$.

§7. Sumatorias especiales.

(a) Daremos un método para calcular $S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{i=1}^n i$.

(i) Considerar la siguiente tabla:

S_n	1	2	3	$\cdots$	$n-2$	$n-1$	n
$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
S_n	n	$n-1$	$n-2$	$\cdots$	3	2	1
$2S_n$	$n+1$	$n+1$	$n+1$	$\cdots$	$n+1$	$n+1$	$n+1$

(ii) Concluir que $2S_n = n(n+1)$ por lo que $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

(b) Daremos un método para calcular para un cierto p fijo $G_n = 1 + p + p^2 + \cdots + p^n = \sum_{i=1}^n p^i$.

(i) Considerar la siguiente tabla:

G_n	1	p	p^2	$\cdots$	p^{n-1}	p^n	
$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$-pG_n$		$-p$	$-p^2$	$\cdots$	$-p^{n-1}$	$-p^n$	$-p^{n+1}$
$(1-p)G_n$	1	0	0	$\cdots$	0	0	$-p^{n+1}$

(ii) Concluir que $(1-p)G_n = 1 - p^{n+1}$ por lo que $G_n = \dfrac{1-p^{n+1}}{1-p}$.

§8. Sumatorias dobles. Consideremos el caso en que queremos sumar números que dependen de dos subíndices. Por ejemplo los números organizados en una matriz como la de abajo.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

De filas $F_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \end{pmatrix}, \cdots, F_m = \begin{pmatrix} a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$ y columnas $C_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}$.

Si S representa la suma de todos los números de la matriz se escribe que:

$$S = \sum_{i=1,j=1}^{m,n} a_{i,j} = \sum_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} a_{i,j}.$$

Pedimos a continuación que se demuestren algunas propiedades de las sumas dobles. (a) Si reordenamos la matriz de forma cualquiera, la suma no cambia de valor. Por ejemplo para la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ se tiene que $S = 10 = 1 + 2 + 3 + 4 = 1 + 3 + 2 + 4 = 4 + 3 + 2 + 1 = \cdots$; (b) Si se suma por filas, o sea se toma cada fila y se suma separadamente y luego se suman todas las filas se escribe $S = \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n a_{i,j})$. Observar que si la fila $F_i = \begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,n} \end{pmatrix}$ se tiene que la suma de la fila F_i es justamente $\sum_{j=1}^n a_{i,j}$; (c) Estudiar la situación análoga para las columnas; (d) Generalizar las propiedades del Ejercicio 6 parte (d) para sumatorias dobles.

§9. Ejercicios de práctica. Las siguientes fórmulas se pueden establecer por inducción complete y eso se hará mas adelante. La primera ya fue demostrada.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2 & ; \\ \sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)/6 & ; \\ \sum_{i=1}^{n} i^3 = n^2(n+1)^2/4. \end{cases}$$

(a) Dados los números $\{a_1, \cdots, a_6\}$ conociendo que: $\sum_{i=1}^{6}(2a_i - 3) = 18$, $\sum_{i=1}^{5}(a_i - 6)^2 = 182$, $a_6 = 8$. Calcular $\sum_{i=1}^{6} a_i^2$; (b) Dados los números $\{a_1, \cdots, a_n\}$ sea $S_r = \sum_{i=1}^{r} a_i$. Probar que $S_{r+1} - S_r = a_{r+1}$ y en particular eso implica que si conocemos todas las sumas, conocemos los valores de todos los sumandos menos el primero; (c) Dada una infinidad de números $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ de los cuales se sabe que para todo n, $\sum_{i=1}^{n} a_i = 2n^2 + 3n$, calcular el valor de $\sum_{i=1}^{6}(a_i - 5)/3$ y los valores de a_n para $n > 1$. (d) Calcular: $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)$, $\sum_{i=1}^{n} 6i^3$, $3+6+9+\cdots+198$, $2+4+6+\cdots+200$, $1+3+5+\cdots+199$, $\sum_{i=1}^{100}(i/(i+1)-(i-1)/i)$.

§10. Sumatorias dobles. Calcular las siguientes sumas: $\sum_{1\leq i\leq 5, 2\leq j\leq 6}(i-2)(j+2)$, $\sum_{1\leq i\leq m, 2\leq j\leq n}(a_i - b_j)$, $\sum_{1\leq i\leq m, 2\leq j\leq n} a_i b_j$.

§11. Seguimos practicando. Desarrolla las siguientes sumatorias, y calcula el valor numérico del resultado, cuando sea posible:

(a) $\sum_{i=5}^{8}(3i-2)$; (b) $\sum_{i=0}^{2}(i^3-8)$; (c) $\sum_{i=h}^{h+2}(i+1)^2$; (d) $\sum_{i=h+1}^{h+1} 4(i-3)$; (e) $\sum_{i=3}^{100}(2i-5) - \sum_{i=3}^{98}(2i-5)$; (f) $\sum_{i=1}^{2(h+1)}(i+1)^2 - \sum_{i=1}^{2h}(i+1)^2$.

§12. Siguiendo con sumatorias. Expresa con el símbolo de sumatoria:

(a) $3+5+7+\cdots+111$; (b) $13+18+23+\cdots+98$; (c) $1+8+27+\cdots+1000$; (d) $2+4+6+\cdots+2k$; (e) $1+9+25+\cdots+121$; (f) $5+8+11+\cdots+3n-1$.