Universidad de la República **Geometría y Álgebra Lineal 2**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Segundo semestre 2024**

PRÁCTICO 1: EJERCICIOS DE REPASO

Notación: $\mathbb{R}_n[x]$ denotará el espacio de polinomios de grado menor o igual que n y variable x. $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ denotará el espacio de matrices con coeficientes en $\mathbb{R}$, m filas y n columnas. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

1. Teorema de las dimensiones

EJERCICIO 1.

1. ¿Existe una transformación lineal sobreyectiva $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$? ¿Existe una transformación lineal inyectiva $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$?
2. Sea $X_1 = (1, 0, 1, 0), X_2 = (1, 1, 1, 0)$ y $X_3 = (1, 1, 1, 1)$. ¿Existe alguna transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\{X_1, X_2, X_3\} \subset Im(T)$?
3. Sean $S = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + t = 0\big\}$ y $U = \big\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0, z + t = 0\big\}$ dos subespacios de $\mathbb{R}^4$.
   a) ¿Existe algún isomorfismo $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $T(S) = U$?
   b) ¿Es posible determinar una transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $Ker(T) = S$ e $Im(T) = U$?

2. Matriz asociada

EJERCICIO 2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (3x + 2y - 4z, x - 5y + 3z)$.
Hallar ${}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}}$ en los siguientes casos:

1. $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$ son las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente.
2. $\mathcal{B} = \big\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\big\}$ y $\mathcal{A}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$.
3. $\mathcal{B} = \big\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\big\}$ y $\mathcal{A} = \big\{(1, 3), (2, 5)\big\}$.

EJERCICIO 3. Sea $T : \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $T(p) = (2a + 3b - 8c, a + b + c, 4a - 5c, 6b)$ con $p : p(t) = a + bt + ct^2, \quad \forall t \in \mathbb{R}$.
Hallar ${}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}}$ en los siguientes casos:

1. $\mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$ son las bases canónicas de $\mathbb{R}_2[t]$ y $\mathbb{R}^4$ respectivamente.
2. $\mathcal{B} = \big\{1, t - 1, (t - 1)^2\big\}$ y $\mathcal{A}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

EJERCICIO 4. Dado $\vec{u}_0 \in \mathbb{R}^3$ fijo, con $||\vec{u}_0|| = 1$, se define $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = \langle v, \vec{u}_0\rangle\vec{u}_0$, donde $\langle\ ,\ \rangle$ representa el producto escalar.

1. Hallar la matriz asociada a T (${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$) en una base ortonormal que incluya al vector $\vec{u}_0$.
2. Hallar la matriz asociada a T en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

EJERCICIO 5. Sean $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y las bases

$$\mathcal{B} = \{(1, -1, 1), (1, 1, 1), (1, 0, 0)\} \text{ y } \mathcal{A} = \{(1, 2, 0), (2, 1, 0), (1, 1, 1)\}.$$

1. ¿Queda T únicamente determinada por $A = {}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}}$?. Justifique su respuesta.
2. En caso afirmativo, hallar $T(x, y, z)$.

Ejercicio 6. Sean $\mathcal{A} = \{1, t+1, (t+1)^2\}$ y $\mathcal{B} = \{(1,1,0),(1,2,3),(3,2,1)\}$ bases de $\mathbb{R}_2[t]$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Consideramos $T : \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ lineal tal que

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dado $q_0 : q_0(t) = t^2 + t - 1,\ \forall\, t \in \mathbb{R}$, hallar $T(q_0)$.

Ejercicio 7. Sea $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definida por $T(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot A$

1. ¿Existen bases en $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que la matriz asociada en dichas bases sea $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$?
2. Hallar la matriz asociada a T en la base canónica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Ejercicio 8. Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ donde $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,0)\}$ y $\mathcal{A} = \{(1,2),(2,-1)\}$.
Probar que T es invertible y hallar una matriz asociada a T^{-1} indicando las bases correspondientes.

3. Cambio de base

Ejercicio 9. Dadas las bases $\mathcal{A} = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ y $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(0,1,0),(-1,0,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Hallar: $coord_{\mathcal{A}}(v)$ y $coord_{\mathcal{B}}(v)$ $\forall\, v \in \mathbb{R}^3$.
2. Dada $Id : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación identidad, hallar $_{\mathcal{A}}(Id)_{\mathcal{B}}$ y $_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{A}}$.
3. Verificar que:

$$coord_{\mathcal{A}}(v) = {_{\mathcal{A}}(Id)_{\mathcal{B}}}.coord_{\mathcal{B}}(v) \text{ y } coord_{\mathcal{B}}(v) = {_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{A}}}.coord_{\mathcal{A}}(v).$$

Ejercicio 10. Dadas las bases de $\mathbb{R}_2[t]$: $\mathcal{A} = \{p_0, p_1, p_2\}$ donde $p_i(t) = t^i,\ \forall\, t \in \mathbb{R}\ (i = 0,1,2)$ y $\mathcal{B} = \{q_0, q_1, q_2\}$ donde $q_0(t) = t^2 - 1,\ q_1(t) = t - 1,\ q_2(t) = 1,\ \forall\, t \in \mathbb{R}$.

1. Hallar $coord_{\mathcal{A}}(p)$ y $coord_{\mathcal{B}}(p)$ $\forall\, p \in \mathbb{R}_2[t]$.
2. Sea $Id : \mathbb{R}_2[t] \longrightarrow \mathbb{R}_2[t]$ la transformación identidad, hallar $_{\mathcal{A}}(Id)_{\mathcal{B}}$ y $_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{A}}$.
3. Verificar que:

$$coord_{\mathcal{A}}(p) = {_{\mathcal{A}}(Id)_{\mathcal{B}}} \cdot coord_{\mathcal{B}}(p) \quad \text{y} \quad coord_{\mathcal{B}}(p) = {_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{A}}} \cdot coord_{\mathcal{A}}(p).$$

Ejercicio 11. Se considera V un espacio vectorial de dimensión finita y $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ dos bases de V. Sea $T : V \longrightarrow V$, lineal, $T \neq Id$.
Indicar, justificando, si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. Si $_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, entonces $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.
2. Si $_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{A}} = {_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}}$, entonces $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

3. Si ${}_{\mathcal{A}}(Id)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$, entonces $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Ejercicio 12. 1. Se consideran las bases $\mathcal{E} = \{(1,0),(0,1)\}$ y $\mathcal{B} = \{(1,1),(-1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$

a) Sea $Id : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación identidad, hallar ${}_{\mathcal{E}}(Id)_{\mathcal{B}}$ y ${}_{\mathcal{B}}(Id)_{\mathcal{E}}$.

b) Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

Hallar ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{B}}$.

2. Se consideran las bases $\mathcal{A} = \{(1,2),(0,1)\}$ y $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(0,1,0),(-1,0,0)\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente.

a) Sean $Id_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $Id_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ las transformaciones identidad y $\mathcal{E}_2$ y $\mathcal{E}_3$ las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente, hallar ${}_{\mathcal{A}}(Id_2)_{\mathcal{E}_2}$ y ${}_{\mathcal{E}_3}(Id_3)_{\mathcal{B}}$.

b) Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$T(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Hallar ${}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}}$.

Ejercicio 13. Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la simetría axial con respecto de la recta representada por el subespacio $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y = 3x\}$. Hallar la matriz asociada a T en las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 14. Dadas $\mathcal{A} = \{v_1, v_2\}$ una base cualquiera de V y $\mathcal{B} = \{w_1, w_2\}$ la base de V formada por los vectores $w_1 = 2v_1 + 3v_2$ y $w_2 = -v_1 - 2v_2$. Sea $T : V \to V$ lineal. Hallar ${}_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}}$ sabiendo que

$${}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 15. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z) = (x+y-z, 2x-3y+2z, 3x-2y+z)$.

1. Determinar bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ tales que ${}_{\mathcal{B}'}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
2. Si A es la matriz asociada de T en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ hallar matrices E y F tales que $EAF = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 16. Sean $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{B}' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$.

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ lineal tal que ${}_{\mathcal{B}'}(T)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Hallar $T(3v_1 + 2v_2 - v_3)$.
2. Hallar bases de $Ker(T)$ y de $Im(T)$.
3. Describir el conjunto $T^{-1}(w_1 - 3w_3 - w_4)$.

4. Operaciones con transformaciones.

EJERCICIO 17. Se consideran las siguientes transformaciones lineales:

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{tal que} \quad T(3,5) = (8,1) \quad T(-2,1) = (-1,-5)$$

$$S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{tal que} \quad S(1,0) = (1,1) \quad S(0,1) = (0,1)$$

y las bases $\mathcal{A} = \big\{(1,2),(1,1)\big\}$ y $\mathcal{B} = \big\{(1,-1),(1,1)\big\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente.

1. Hallar ${}_{\mathcal{B}}(T+S)_{\mathcal{A}}$ y ${}_{\mathcal{B}}(3T)_{\mathcal{A}}$.
2. Hallar ${}_{\mathcal{B}}((S+T)^2)_{\mathcal{A}}$.
   Nota: $S^2 = S \circ S$.

EJERCICIO 18. Se consideran las siguientes transformaciones lineales:

$$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{tal que} \quad T(3,5) = (8,1) \quad T(-2,1) = (-1,-5)$$

$$S : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{tal que} \quad S(1,0) = (1,-1,1) \quad S(0,1) = (0,0,1)$$

y las bases $\mathcal{A} = \big\{(1,-1),(0,1)\big\}$ y $\mathcal{B} = \big\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\big\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente.

1. Hallar ${}_{\mathcal{A}}(T)_{\mathcal{A}}$.
2. Hallar ${}_{\mathcal{B}}(S)_{\mathcal{A}}$.
3. Hallar ${}_{\mathcal{B}}(S \circ T)_{\mathcal{A}}$.
4. Verificar la parte anterior hallando $T(x,y)$, $S(a,b)$, $S \circ T(x,y)$ y luego la matriz asociada de $S \circ T$ directamente.

EJERCICIO 19. Sea $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una rotación de centro $\vec{0}$ y ángulo α

1. Hallar la matriz asociada a T en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.
2. Hallar la matriz asociada a T^2 en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.
3. Deducir fórmulas para $cos(2\alpha)$ y $sen(2\alpha)$.

5. Matrices semejantes.

EJERCICIO 20. Probar que la relación de matrices semejantes es una relación de equivalencia.

Recordar que una relación, es una relación de equivalencia si verifica las propiedades:

- <u>idéntica</u> (toda matriz es semejante a sí misma),
- <u>simétrica</u> (si A es semejante a B, entonces B es semejante a A) y
- <u>transitiva</u> (si A es semejante a B y B es semejante a C, entonces A es semejante a C).

EJERCICIO 21. Dadas A y B matrices $n \times n$ semejantes, probar que:

1. A^p y B^p son semejantes, $\forall p \in \mathbb{N}$.
2. A^t y B^t son semejantes.
3. A es invertible $\quad\Leftrightarrow\quad$ B es invertible. Además, A^{-1} y B^{-1} son semejantes.

EJERCICIO 22. Probar que las siguientes matrices son dos a dos semejantes:

$$M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}, \; M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 23. Dadas $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, lineal y $\mathcal{B}_1$ una base de $\mathbb{R}^3$, donde

$$_{\mathcal{B}_1}(T)_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

¿Existe una base $\mathcal{B}_2$ de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$_{\mathcal{B}_2}(T)_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ -1 & -10 & 11 \end{pmatrix}?$$

Justifique su respuesta.