RANGO DE UNA MATRIZ

GAL 2 2024 - CURE

1. Forma escalonada reducida

Recordemos que una matriz está en *forma escalonada* si:

- todas las filas que tienen solamente ceros están abajo de las filas que tienen tienen alguna entrada $\neq 0$.
- si la primera entrada no nula de la fila i está en la columna j, entonces la primera entrada no nula de la fila $i+1$, si existe, está en la columna $> j$.

Una matriz está en *forma escalonada* reducida si está en forma escalonada y además: la primera entrada $\neq 0$ de cada fila es igual a 1, y es la única entrada $\neq 0$ de su columna.

Por ejemplo, la siguiente es escalonada reducida.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En GAL1 vimos:

Teorema. 1. *Para toda $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ existe $B \in \mathrm{M}_{m\times m}(K)$ tal que BA está en forma escalonada reducida.*

La matriz B es un producto de matrices elementales, y a la matriz BA se le llama la *forma escalonada reducida de A*. También vimos:

Teorema. *La forma escalonada reducida de una matriz es única.*

2. Rango

Definición 1. Si $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$, definimos

1. el *rango* de A: el número de filas no nulas de su forma escalonada reducida. Lo notamos $\mathrm{ran}(A)$.
2. el *rango por filas (columnas)* de A: el número de filas (columnas) linealmente independientes de A. Lo notasmo $\mathrm{ranf}(A)$ ($\mathrm{ranc}(A)$).

Queremos ver que estas tres nociones de rango coinciden.

Lema 1. *Si la matriz A está en forma escalonada reducida, entonces existe una matriz invertible B tal que*

$$AB = \begin{pmatrix} I_k & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

donde $k = \mathrm{ran}(A)$.

Demostración. Recordar que las operaciones elementales sobre las columnas de A se realizan multiplicando a la derecha por matrices elementales.

La prueba es por inducción en el número de filas de A. Si A tiene una fila, entonces $A = 0$ o $A = (1, a_2, a_3, \dots, a_n)$. En ambos casos está en la forma (1).

Si la matriz tiene $m+1$ filas y el resultado es válido para matrices con m filas, tenemos dos casos.

El primer caso es en el cual A tiene alguna fila toda de ceros, o lo que es lo mismo, que la fila $m+1$ de A es 0. Entonces

$$A = \begin{pmatrix} A' \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

con $A' \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$. Como A' también es escalonada reducida, por hipótesis inductiva existe $B \in \mathrm{M}_n(K)$ invertible tal que

$$A'B = \begin{pmatrix} I_k & C \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

con $k = \mathrm{ran}(A')$. Notar que $\mathrm{ran}(A') = \mathrm{ran}(A)$. Entonces AB tiene la forma (3) con una fila de ceros extra abajo del todo, así que tenemos lo que queríamos.

El segundo caso es cuando A no tiene filas nulas. En este caso cada fila comienza con cierta candidad de ceros (incluyendo la cantidad 0) y a la derecha de esos ceros tiene un 1. La columna de ese primer 1 tiene todas sus otras entradas 0. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Veamos que llevando las columans de esos 1 hacia la izquierda, obtenemos una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} I_k & C \end{pmatrix} \tag{4}$$

Como intercambiar columnas es una operación elemental, tenemos que $AB = \left(\begin{smallmatrix} I_k & C \end{smallmatrix}\right)$ para una matriz invertible B.

La prueba la haremos por inducción en el número de filas. Si A tiene una fila, ya está en la forma (4). Si tiene $m+1$ filas y el resultado vale para matrices de m filas, escribimos

$$A = \begin{pmatrix} A' \\ F_{m+1} \end{pmatrix}$$

y por hipótesis inductiva, moviendo las columnas de A' con 1 líderes hacia la izquierda obtenemos una matriz de la forma $(I_{k-1}\ C)$. Así que $A'B = (I_{k-1}\ C)$ para alguna matriz invertible B. Al realizar las mismas operaciones sobre las columnas de A, tenemos

$$AB = \begin{pmatrix} I_{k-1} & C \\ D & E \end{pmatrix}$$

donde D y E son matrices de una sola fila.

Veamos que $D = 0$. Notar que F_{m+1} comienza con ceros y tiene el primer 1 en una cierta columna $j \geq k$. Las columnas que movimos hacia la izquierda anteriormente están todas a la izquierda de la columna j. De manera que son todas columnas que teminan con 0; es decir $D = 0$. Por último, intercambiando la columnas k y j tenemos una matriz como en enunciado del lema. $\square$

Corolario 1. *Para toda matriz $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ existen matrices invertibles $C \in \mathrm{M}_m(K)$ y $B \in \mathrm{M}_n(K)$ tal que*

$$CAB = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

donde $k = \mathrm{ran}(A)$.

Demostración. Sabemos que existe C invertible tal que CA es escalonada reducida. Por el Lema 1, existe B_1 invertible tal que

$$CAB_1 = \begin{pmatrix} I_k & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $k = \mathrm{ran}(CA)$. Pero $\mathrm{ran}(A)$ es exactamente $\mathrm{ran}(CA)$ por definición.

Las columnas de I_k son los elementos de la base canónica de K^k. Por lo tanto, cada columna en D es combinanación lineal de las columnas de I_k. Esto implica que podemos eliminar las columnas de D haciendo operaciones sobre columnas. En otra palabras, existe una matriz invertible B_2 tal que CAB_1B_2 tiene la forma del enunciado. □

Recordar que toda matriz $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(K)$ da lugar a una transformación lineal $T_A\colon K^n \to K^m$ por $T_A(x) = Ax$.

Lema 2. *Para cualquier matriz A vale:*
1. $\operatorname{ranc}(A) = \dim \operatorname{Im}(T_A)$.
2. $\operatorname{ranc}(BAC) = \operatorname{ranc}(A)$ *si B y C son matrices invertibles.*
3. $\operatorname{ranf}(BAC) = \operatorname{ranf}(A)$ *si B y C son matrices invertibles.*
4. $\operatorname{ranf}(A) = \operatorname{ranc}(A) = \operatorname{ran}(A)$.

Demostración. 1. Como la imagen de T_A está generada por $G = \{T_A(e_1), \dots, T_A(e_n)\}$, ya que $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de K^n. Pero $T_A(e_i) = Ae_i$ es la columna i-ésima de A. Así que las imagen de T_A está generada por las columnas de A. Este generador G contiene una base de $\operatorname{Im}(T_A)$, que tiene $\dim \operatorname{Im}(T_A)$ elementos. Así que hay esa cantidad de columnas l.i.

2. Alcanza con probar que $\operatorname{Im}T_{BAC}$ e $\operatorname{Im}T_A$ tienen la misma dimensión. Pero $T_{BAC} = T_BT_AT_C$ por lo que

$$\operatorname{Im}T_{BAC} = T_BT_A(\operatorname{Im}T_C) = T_BT_A(K^m) = T_B(\operatorname{Im}T_A)$$

que es isomorfo a $\operatorname{Im}T_A$ pues T_B es inyectivo (es isomorfismo). Por lo tanto tiene la misma dimensión que $\operatorname{Im}T_A$.

3. Es simplemente usar 2 y matrices transpuestas:

$$\operatorname{ranf}(BAC) = \operatorname{ranc}((BAC)^\intercal) = \operatorname{ranc}(C^\intercal A^\intercal B^\intercal) = \operatorname{ranc}(A^\intercal) = \operatorname{ranf}(A).$$

4. Por el Corolario1, existen matrices invertibles B y C tal que CAB tiene la forma (3) donde $k = \operatorname{ran}(A)$. Entonces

$$\operatorname{ranc}(A) = \operatorname{ranc}(CAB) = \operatorname{ranc}\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = k = \operatorname{ranf}\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{ranf}(CAB)$$
$$= \operatorname{ranf}(A).$$

□