

# Circuitos

## Elementos de un circuito

Pablo Monzón

IIE-Fing-UDELAR

Segundo semestre, 2020

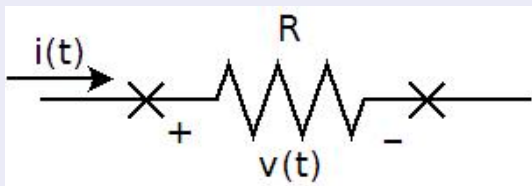


# Elementos de un circuito

A continuación presentamos los elementos más comunes que conformarán los circuitos que analizaremos.

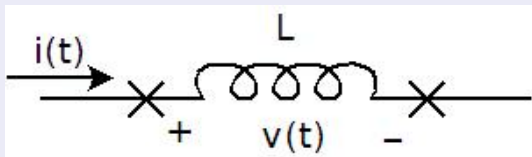
Un elemento tiene por lo general dos terminales y se describe por la relación entre la *tensión en bornes* y la *corriente que lo atraviesa*, usualmente dada por una *ley física*.

Resistencia:  $v(t) = R i(t)$  (Ley de Ohm)

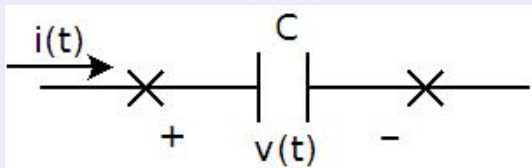




Inductancia:  $v(t) = L \frac{d}{dt} i(t)$ ,  $i(0) = i_0$

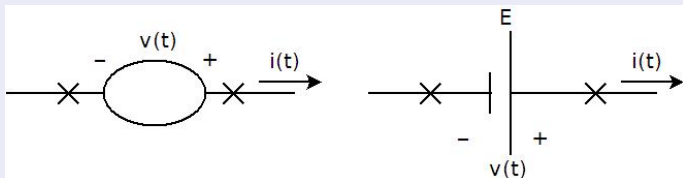


Condensador:  $i(t) = C \frac{d}{dt} v(t)$ ,  $v(0) = v_0$



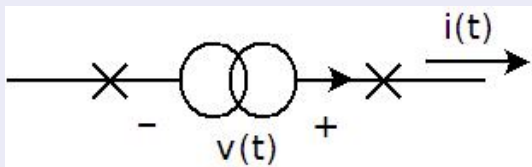


Fuente independiente de tensión:  $v(t)$  dado,  $i(t)$  cualquiera





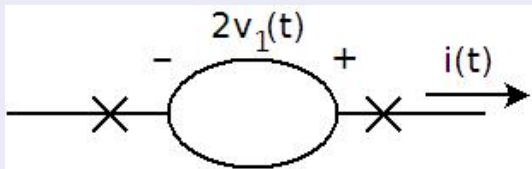
Fuente independiente de corriente:  $i(t)$  dado,  $v(t)$  cualquiera





## Fuente dependiente de tensión

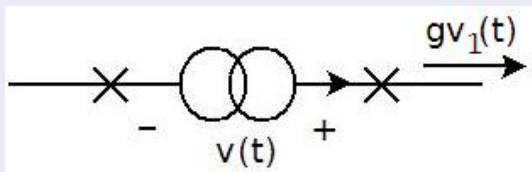
La tensión  $v(t)$  es función de otra magnitud del circuito. La corriente  $i(t)$  es cualquiera.





## Fuente dependiente de corriente

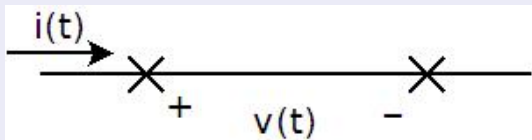
La corriente  $i(t)$  es función de otra magnitud del circuito. La tensión  $v(t)$  es cualquiera.



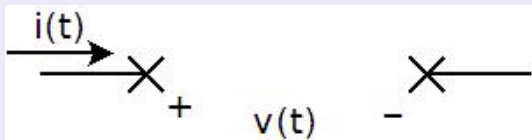


# Elementos de un circuito

Cortocircuito:  $v(t) = 0$ ,  $i(t)$  cualquiera



Circuito abierto:  $i(t) = 0$ ,  $v(t)$  cualquiera



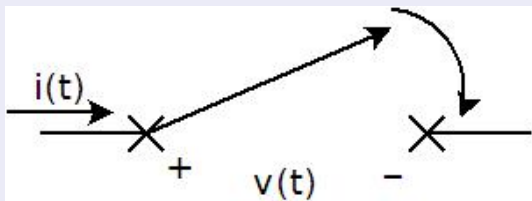




## Llave

Tiene dos posiciones: cerrada (ON) ; abierta (OFF)

*ON cortocircuito , OFF circuito abierto*



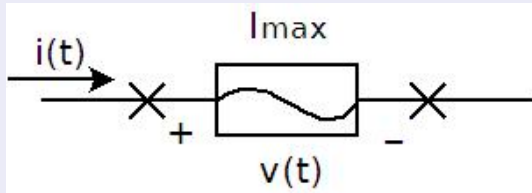
No es un elemento lineal, pero sí lo es en cada uno de sus modos de funcionamiento.



## Fusible

Tiene dos estados, sano y cortado. Una vez que se corta, cuando el módulo de la corriente alcanza un valor de corte  $I_{max}$ , no cambia más su estado.

*Sano : cortocircuito , Cortado : circuito abierto*



No es un elemento lineal, pero sí lo es en cada uno de sus modos de funcionamiento.



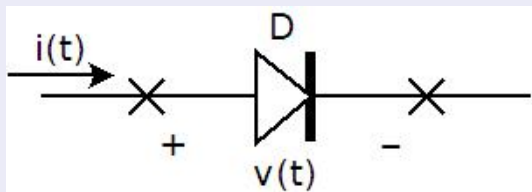
## Diodo ideal

Tiene dos estados, ON (cortocircuito) y OFF (circuito abierto), compatible

con la siguiente tabla:

Estado	$v(t)$	$i(t)$
ON	0	$> 0$
OFF	$< 0$	0

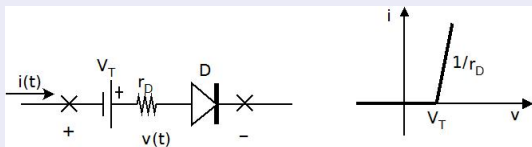
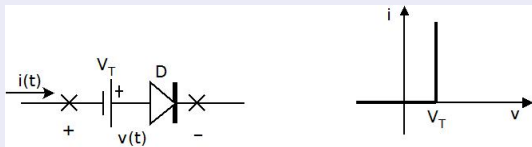
Su estado depende del resto del circuito.



No es un elemento lineal, pero sí lo es en cada uno de sus modos de funcionamiento.

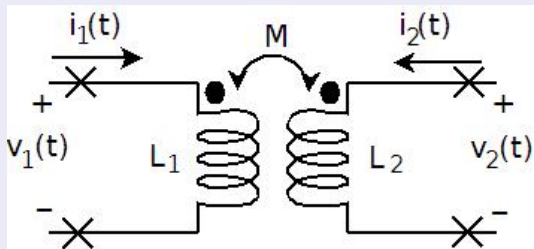


## Diodo: de lo real a lo ideal



## Transformador

Es un elemento conformado por dos bobinas y un núcleo. Consta de cuatro terminales, agrupados de a dos (primario y secundario).



Con las polaridades y sentidos de la figura, se rige por las siguientes ecuaciones:

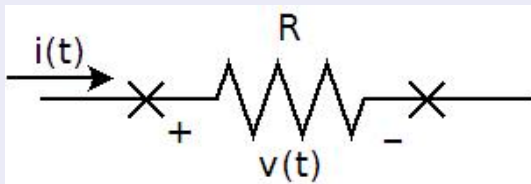
$$\begin{cases} v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} \\ v_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt} \end{cases}$$

# Potencia de una componente



Consideremos una resistencia como componente de ejemplo.

$$v(t) = Ri(t) \text{ (Ley de Ohm)}$$



Definimos la **potencia instantánea** de la componente como

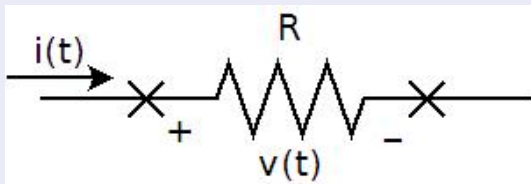
$$p(t) = v(t) \cdot i(t),$$

expresión que puede combinarse con la ley  $v(t) - i(t)$  de la componente.

# Potencia de una componente



$$v(t) = Ri(t) \text{ (Ley de Ohm)}$$



$$p(t) = v(t).i(t) = \frac{v^2(t)}{R} = R.i^2(t),$$

Para el caso de una fuente, usualmente se considera la corriente en el otro sentido.



## Ley de mallas

La suma de las caídas de tensión a lo largo de una malla es nula.

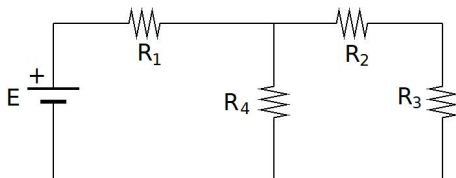
- Primero se define un sentido de recorrido de la malla.
- Primero se define la forma de medir las tensiones de los elementos de la malla.
- Finalmente, se suman las caídas en el sentido de recorrido de la malla.

## Ley de nudos

La suma de las corrientes que inciden en un nudo es nula.

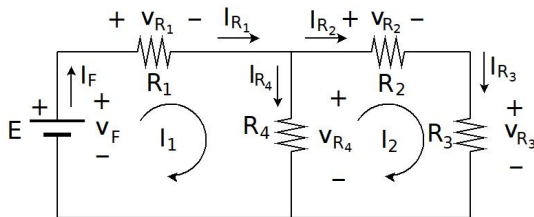
- Luego se define la forma de medir las corrientes que inciden en un nudo (entrantes y salientes).
- Finalmente, se suman -con signo- las corrientes que llegan al nudo (las que salen se restan).



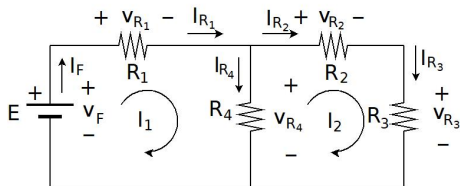


## Malla

- Camino simple y cerrado dentro de un circuito.
- Un elemento puede pertenecer a más de una malla.
- A cada malla podemos asignarle un sentido de recorrido (horario o antihorario).
- Siempre *sobra* una malla.



- Para cada componente, definimos cómo vamos a medir su tensión en bornes.
- Junto con el sentido elegido para la corriente de malla, tenemos la descripción de cada elemento.
- Recorremos cada malla y vamos sumando las caídas de tensión que encontramos.
- Una caída es positiva en la suma si está medida en el sentido de recorrido de la malla.

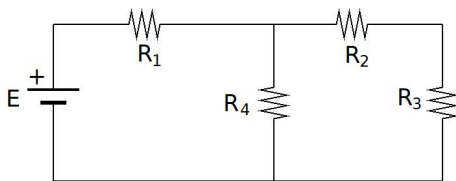


## Ejemplo

- Malla de corriente  $I_1$ :  $-v_F + v_{R_1} + v_{R_4} = 0$ .
- Malla de corriente  $I_2$ :  $-v_{R_4} + v_{R_2} + v_{R_3} = 0$ .
- Observación: si sumamos ambas ecuaciones, nos queda

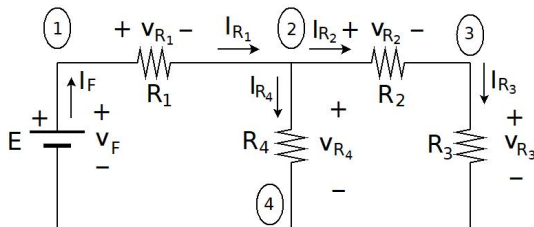
$$-v_F + v_{R_1} + v_{R_2} + v_{R_3} = 0$$

que es la malla exterior y no aporta una ecuación independiente.

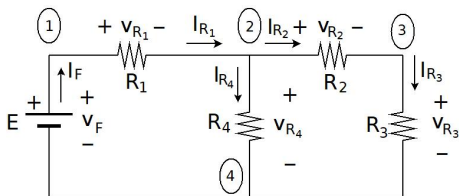


## Nudo (ó *nodo*)

- Punto de contacto entre dos elementos del circuito.
- En un nudo pueden encontrarse varios elementos.
- En un nudo, las corrientes de las ramas incidentes *entran* o *salen*.
- Siempre *sobra* un nudo.



- Para cada componente, definimos cómo vamos a medir su corriente.
- En cada nudo, sumamos las corrientes definidas para cada rama incidente.
- Una corriente es positiva en la suma si es incidente (entra) en el nudo.



## Ejemplo

- Nudo 1:  $I_F - I_{R_1} = 0$ .
- Nudo 2:  $I_{R_1} - I_{R_2} - I_{R_4} = 0$ .
- Nudo 3:  $I_{R_2} - I_{R_3} = 0$ .
- Observación: si sumamos las ecuaciones nos queda, a menos del signo, la ecuación del nudo 4:

$$-I_F - I_{R_4} - I_{R_3} = 0$$



## Resolver el circuito

- Hallar tensiones y corrientes para cada elemento del circuito.
- En general trabajamos de forma *paramétrica* en algunos elementos, para entender qué pasa si decidimos cambiar algo, o si algún elemento modifica su valor, etc.

## Entradas y salidas

- **Entradas:** tensiones y/o corrientes que podemos manejar a voluntad. Ejemplo: fuente independiente de tensión o corriente, carga inicial en un condensador, etc.
- **Salidas:** tensiones y/o corrientes de interés, o que podemos medir, a partir de las cuales pretenderemos entender qué hace el circuito. Ejemplo: tensión y/o corriente en una determinada componente.



## Idea general

Combinar adecuadamente las leyes de Kirchhoff con las leyes tensión-corriente de los elementos para poder llegar a un conjunto de ecuaciones que nos den las salidas en función de las entradas.

## Método de los nudos

- Incógnitas: tensiones de los nudos, referidas a un *nodo base*.
- Ecuaciones: leyes de nudos, escritas en función de las tensiones nodales.

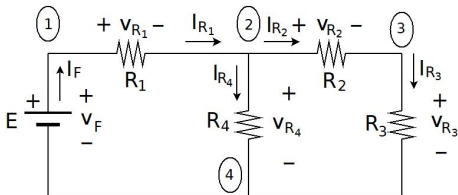
## Método de las mallas

- Incógnitas: corrientes de mallas.
- Ecuaciones: leyes de mallas, escritas en función de las corrientes de malla.



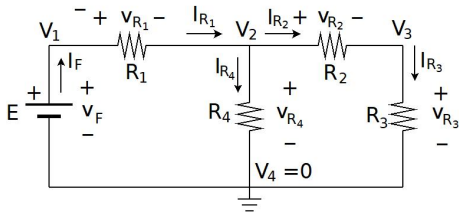
## Tensiones nodales

- Elegimos un nodo como referencia.
- Introducimos las diferencias de tensión entre los demás nodos y el de referencia.
- Escribimos las ecuaciones de nudos en función de las tensiones nodales.



## Método de los nudos

- Incógnitas: tensiones de los nodos, referidas a un *nodo base*.
- Ecuaciones: leyes de nudos, escritas en función de las tensiones nodales.



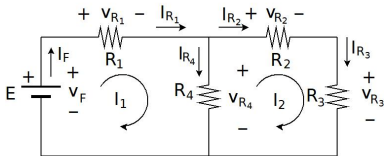
## Método de los nudos

$$\left. \begin{aligned} I_F - I_{R_1} &= 0 \\ I_{R_1} - I_{R_2} - I_{R_4} &= 0 \\ I_{R_2} - I_{R_3} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} I_F - \frac{V_1 - V_2}{R_1} &= 0 \\ \frac{V_1 - V_2}{R_1} - \frac{V_2 - V_3}{R_2} - \frac{V_2}{R_4} &= 0 \\ \frac{V_2 - V_3}{R_2} - \frac{V_3}{R_3} &= 0 \end{aligned} \right.$$

- La incógnita  $I_F$  va a depender de lo que hace el resto del circuito, dado que es la variable libre de la fuente.
- Como contraparte:  $V_1 = E$  !!!
- De la segunda y tercer ecuación obtenemos  $V_2$  y  $V_3$  y luego todas las demás incógnitas.

## Método de las mallas

- Elegimos un sentido de circulación para cada malla.
- Escribimos las ecuaciones de mallas en función de las corrientes de malla.



$$-v_F + R_1 \cdot I_1 + R_4 \cdot (I_1 - I_2) = 0, \quad R_4 \cdot (I_2 - I_1) + R_2 \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3 = 0.$$

$$\begin{cases} (R_1 + R_4) \cdot I_1 - R_4 \cdot I_2 & = v_F \\ -R_4 \cdot I_1 + (R_2 + R_3) \cdot I_2 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} R_1 + R_4 & -R_4 \\ -R_4 & R_2 + R_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_F \\ 0 \end{bmatrix}$$

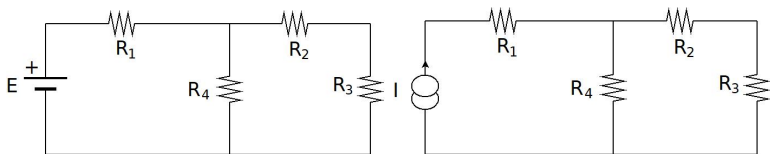
## Resolvemos, usando que $v_F = E$

- Despejamos las corrientes de malla.
- De ahí obtenemos las incógnitas de interés.

# ¿Cuál usamos?



- Identificamos los nudos, las mallas y las fuentes independientes de tensión y corriente.
- Cada fuente de tensión fija una tensión nodal.
- Cada fuente de corriente fija una corriente de malla
- Usamos el método que tenga menos incógnitas.

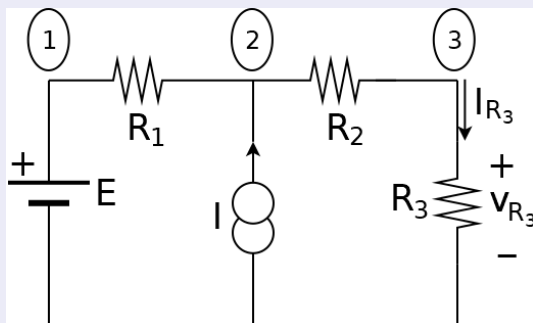




- Con frecuencia nos vamos a encontrar con circuitos que tienen varias fuentes independientes.
- Siempre podemos analizarlos aplicando mallas o nudos, obteniendo el efecto total de las fuentes sobre las magnitudes de interés.
- Si el circuito es lineal, es decir, si todos los elementos tienen una relación tensión-corriente lineal, podemos simplificar el análisis.
- La linealidad, en este contexto, podría resumirse así: *el efecto total de las fuentes independientes es la suma del efecto que cada fuente tendría sobre la magnitud de interés si fuera la única fuente independiente del circuito.*



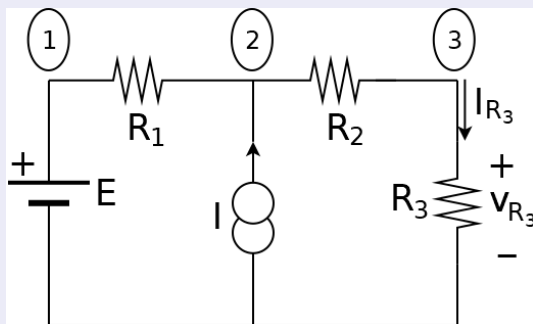
## Ejemplo 1



- Objetivo: hallar  $v_{R_3}$  e  $I_{R_3}$ .
- Aplicamos nudos, tomando como referencia el nudo de abajo.
- Las tensiones en los nodos 1 y 3 valen  $E$  y la tensión de interés  $v_{R_3}$ .
- Sea  $V_2$  la tensión del nodo 2.
- Planteamos las ecuaciones.



## Ejemplo 1



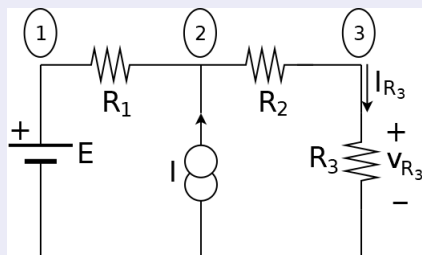
$$\frac{E - V_2}{R_1} + I = \frac{V_2 - V_{R_3}}{R_2}, \quad \frac{V_2 - V_{R_3}}{R_2} = \frac{V_{R_3}}{R_3}$$

De la segunda ecuación obtenemos

$$V_2 = V_{R_3} \left( 1 + \frac{R_2}{R_3} \right)$$



## Ejemplo 1



Despejando, obtenemos

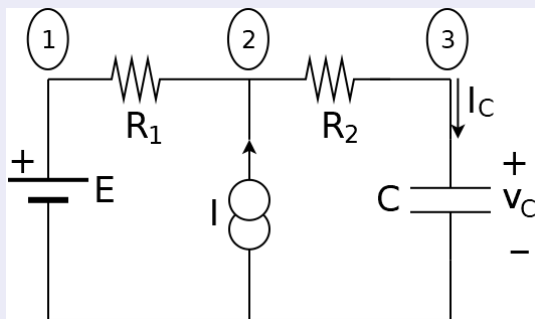
$$V_{R_3} = \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot E + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot I$$

$$I_{R_3} = \frac{1}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot E + \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot I$$





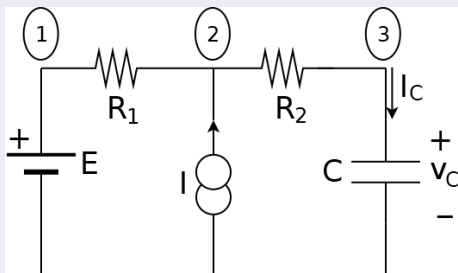
## Ejemplo 2



- Objetivo: hallar  $v_c$  e  $I_c$ .
- Aplicamos **nudos**, tomando como referencia el nudo de abajo.
- Las tensiones en los nodos 1 y 3 valen  $E$  y la tensión de interés  $v_c$ .
- Sea  $V_2$  la tensión del nodo 2.
- Planteamos las ecuaciones.



## Ejemplo 2



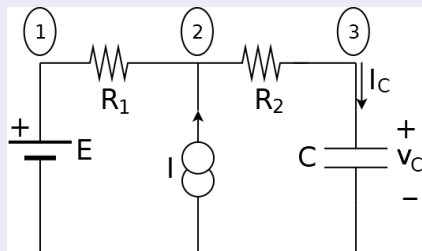
$$\frac{E - V_2}{R_1} + I = \frac{V_2 - v_C}{R_2} \quad , \quad \frac{V_2 - v_C}{R_2} = I_C = C \frac{dv_C}{dt}$$

De la segunda ecuación obtenemos

$$V_2 = v_C + R_2 C \frac{dv_C}{dt}$$



## Ejemplo 2



$$\frac{E}{R_1} + I = V_2 \left[ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] - \frac{v_C}{R_2} \quad , \quad V_2 = v_C + R_2 C \frac{dv_C}{dt}$$

Despejando, obtenemos la ecuación diferencial

$$(R_1 + R_2)C \cdot \frac{dv_C}{dt}(t) + v_C(t) = E + R_1 I$$



## Ejemplo 2

$$(R_1 + R_2)C \cdot \frac{dv_C}{dt}(t) + v_C(t) = E + R_1 I$$

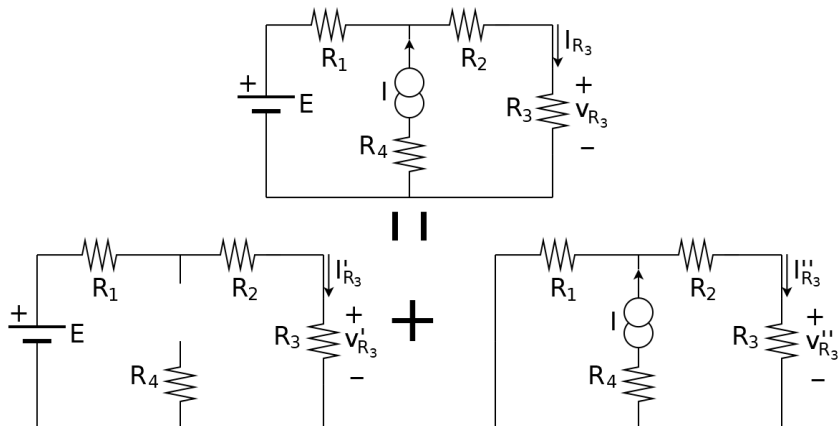
$$(R_1 + R_2)C \cdot \frac{dv_C^E}{dt}(t) + v_C^E(t) = E \quad \parallel \quad (R_1 + R_2)C \cdot \frac{dv_C^I}{dt}(t) + v_C^I(t) = R_1 I$$

$$\Rightarrow v_C(t) = v_C^E(t) + v_C^I(t)$$



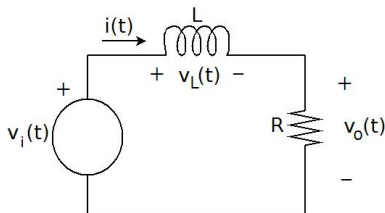
- Por **linealidad**, el efecto de tener varias fuentes en un circuito es la suma del efecto que haría cada fuente por sí sola.
- Anulamos las fuentes y las vamos prendiendo de a una.
- **Anular** una fuente independiente equivale a sustituirla por una del mismo tipo y de valor cero.
  - ▶ Anular una fuente de tensión equivale a **cortocircuitarla**.
  - ▶ Anular una fuente de corriente equivale a **abrirla**.
- También podemos anularlas por grupos (por ejemplo: sólo las de corriente o sólo las de tensión).

# Principio de superposición



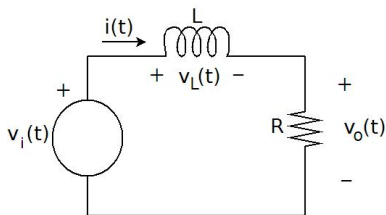
$$v_{R_3} = v'_{R_3} + v''_{R_3} \quad , \quad I_{R_3} = I'_{R_3} + I''_{R_3}$$

# Análisis de un circuito $R - L$ (OPCIONAL)



## Objetivos:

- Asumiendo conocida la tensión de la fuente (entrada), determinar las tensiones y corrientes del resto de los elementos del circuito, en particular la que consideraremos al *salida del circuito* ( $v_o(t)$ ), **a partir del instante en que se enciende la fuente.**
- Analizar la situación particular de entrada constante.
- Analizar la situación particular de entrada sinusoidal, discutiendo en función de la frecuencia de la entrada.



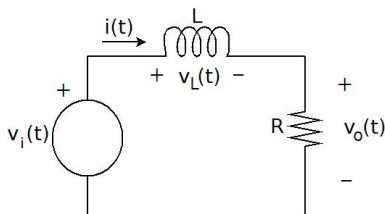
## Ley de Kirchhoff de mallas

$$v_i(t) = v_L(t) + v_o(t)$$

## Leyes de los elementos

$$v_L(t) = L \frac{d}{dt} i(t) \quad , \quad v_o(t) = Ri(t)$$



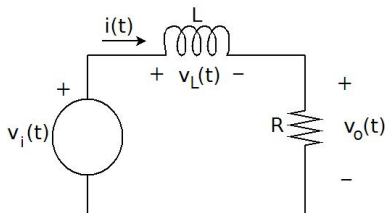


## Ecuación de la corriente

$$v_i(t) = L \frac{d}{dt} i(t) + R i(t) \Leftrightarrow \frac{d}{dt} i(t) + \frac{R}{L} i(t) = \frac{1}{L} v_i(t)$$

- Es una ecuación diferencial lineal de primer orden.
- La condición inicial es la corriente  $i_{L_0}$  por la bobina cuando se inicia el circuito.

# Resolvemos la ecuación diferencial



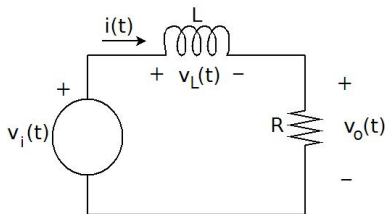
Solución homogénea:  $i_H(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ ,  $\tau = \frac{L}{R}$

Comentarios:

- La solución homogénea converge asintóticamente a 0.
- Decimos que es **transitoria**, ya que se extingue al transcurrir el tiempo.
- El parámetro  $\tau$  - *constante de tiempo del circuito*- da una idea de durante cuánto tiempo es apreciable la solución transitoria.
- Para poder avanzar, tenemos que trabajar con una entrada conocida.



Entrada constante  $v_i(t) = E, t \geq 0$



Ecuación de la corriente

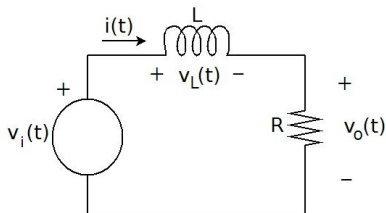
$$\frac{d}{dt}i(t) + \frac{R}{L}i(t) = \frac{E}{L}$$

Solución particular (constante)

$$i_P(t) = \frac{E}{R}$$



Entrada constante  $v_i(t) = E, t \geq 0$



Solución completa

$$i(t) = i_P(t) + i_H(t) = \frac{E}{R} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

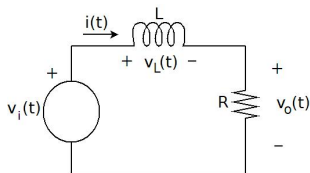
donde  $A$  se ajusta a partir de la condición inicial:  $A = i_{L_0} - \frac{E}{R}$ .

La salida

$$v_o(t) = Ri(t) = E + R \left( i_{L_0} - \frac{E}{R} \right) e^{-\frac{t}{\tau}}$$



Entrada constante  $v_i(t) = E, t \geq 0$

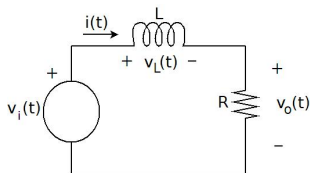


## Comentarios

- La solución converge a un valor constante; corresponde a la extinción de la parte transitoria.
- Para un tiempo del orden de dos o tres  $\tau$ , ya podemos despreciar la parte transitoria ( $e^{-2} \approx 0,135$ ).
- Decimos que alcanzamos un **régimen de continua**.



Entrada constante  $v_i(t) = E, t \geq 0$



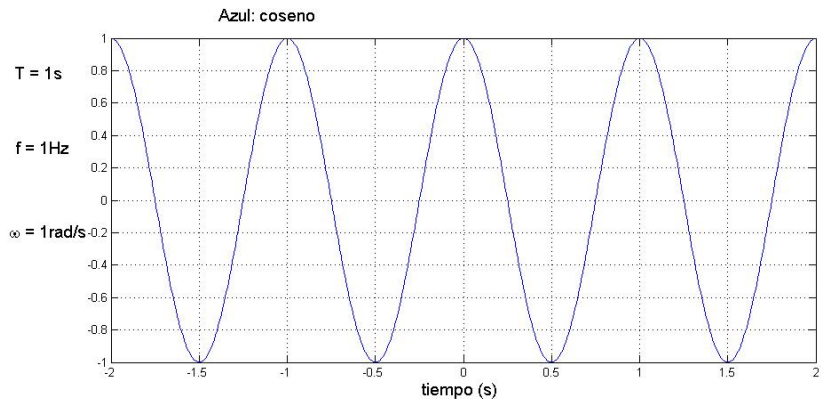
## Comentarios

- El valor de régimen de la corriente es  $\frac{E}{R}$ , que puede obtenerse observando que, con excitación constante, la bobina actúa como un *cortocircuito*.
- Una situación similar se da con un condensador que, con excitación constante, se comporta como un *circuito abierto*.

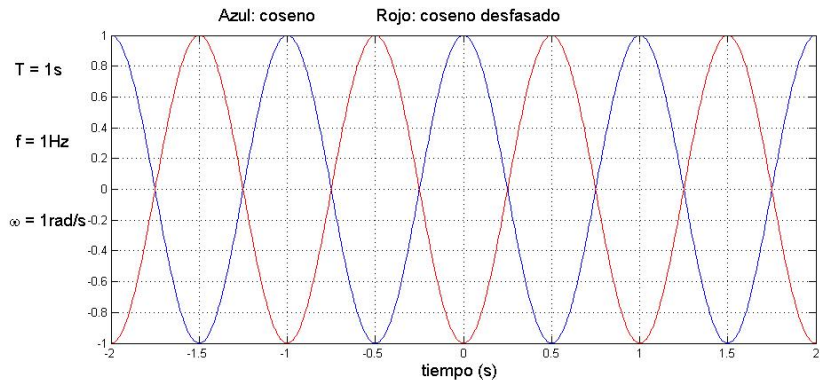


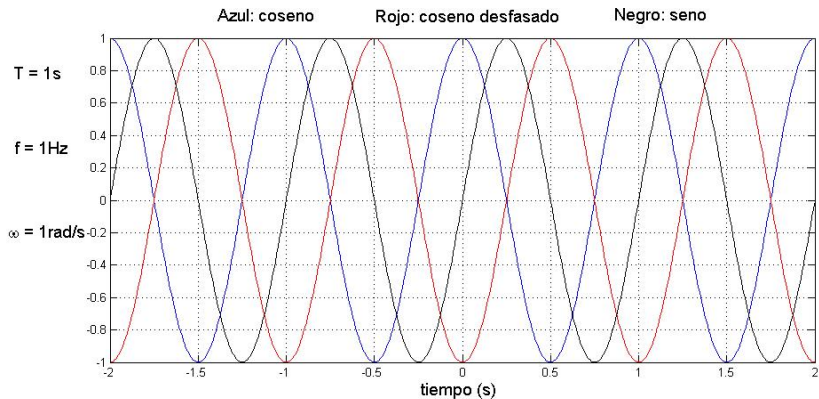
$$A \cos(\omega t + \varphi)$$

- $A$  es la **amplitud** de la señal;
- $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ , siendo
  - ▶  $T$  - periodo de la señal,
  - ▶  $f = 1/T$  - frecuencia de la señal,
  - ▶  $\omega$  - pulsación o frecuencia angular de la señal.
- $\varphi$  es la **fase** de la señal.



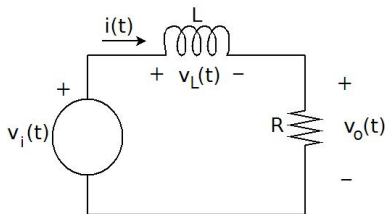








Entrada sinusoidal:  $v_i(t) = E \cos(\omega t + \varphi_v)$



Solución particular (sinusoidal)

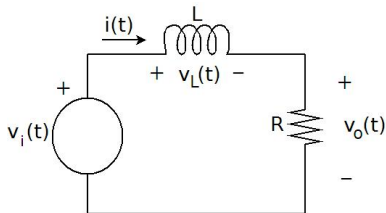
$$i_P(t) = I \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \quad , \quad \varphi_i = \varphi_v - \text{atan} \left( \frac{L\omega}{R} \right)$$

(derivando y sustituyendo en la ecuación de la corriente; ver Notas del curso).



Entrada sinusoidal:  $v_i(t) = E \cos(\omega t + \varphi_v)$



### Solución completa

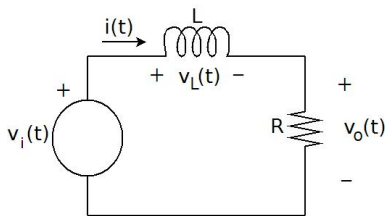
$$i(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \cos \left[ \omega t + \varphi_v - \text{atan} \left( \frac{L\omega}{R} \right) \right] + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

### Salida

$$v_o(t) = \frac{RE}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \cos \left[ \omega t + \varphi_v - \text{atan} \left( \frac{L\omega}{R} \right) \right] + RAe^{-\frac{t}{\tau}}$$



Entrada sinusoidal:  $v_i(t) = E \cos(\omega t + \varphi_v)$



## Comentarios

- Nuevamente tenemos un estado de régimen.
- Al pasar el tiempo, la solución tiende a ser sinusoidal, con la misma frecuencia que la entrada (régimen sinusoidal).
- La relación de amplitud entre la entrada y la respuesta en régimen y la respectiva relación entre las fases **dependen de la frecuencia de trabajo**.



Entrada sinusoidal:  $v_i(t) = E \cos(\omega t + \varphi_v)$

## Comentarios

- La relación de amplitud entre la entrada y la respuesta en régimen se denomina **ganancia del sistema** y **depende de la frecuencia de trabajo**.

$$\text{relación de amplitud : } \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

- Para frecuencias bajas ( $\omega \rightarrow 0$ ) la relación de amplitudes es casi 1, por lo que la respuesta tendrá aproximadamente la misma amplitud que la entrada.
- Para frecuencias altas ( $\omega \rightarrow \infty$ ) la relación de amplitudes es casi 0, por lo que la salida será aproximadamente nula!!
- Un circuito con este comportamiento se dice que es un **filtro pasabajos**, ya que no altera la amplitud de las señales de frecuencia baja y prácticamente elimina las altas frecuencias.

Entrada sinusoidal:  $v_i(t) = E \cos(\omega t + \varphi_v)$



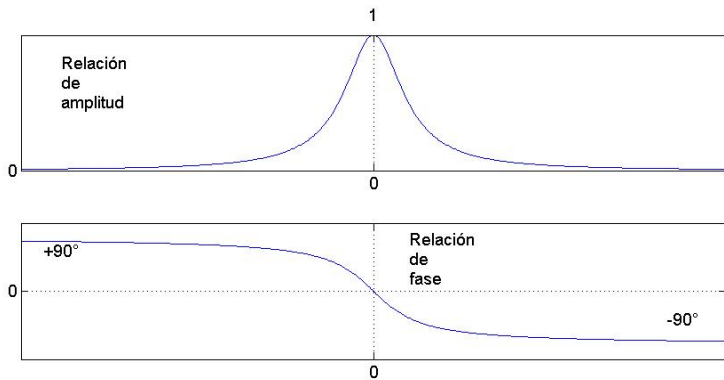
## Comentarios

- La relación de fase entre la entrada y la respuesta en régimen **depende de la frecuencia de trabajo**.

$$\text{relación de fase : } -\operatorname{atan}\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

- Para frecuencias bajas ( $\omega \rightarrow 0$ ) el desfase es casi 0, por lo que la respuesta tendrá aproximadamente la misma fase que la entrada.
- Para frecuencias altas ( $\omega \rightarrow \infty$ ) la relación de amplitudes es casi  $-90^\circ$ , por lo que si la entrada es un coseno, la salida será prácticamente un seno.

# Representación gráfica





# A lo largo del curso aprenderemos:



- que los resultados que vimos del filtro pasabajos son generales a muchos sistemas lineales descritos por ecuaciones diferenciales lineales, en la medida que la respuesta homogénea sea transitoria.
- herramientas para sistematizar el análisis que hicimos recién, de forma de poder abordar cualquier sistema lineal.
- que el análisis de la respuesta en frecuencia de un circuito nos servirá para conocer en detalle su respuesta frente a una entrada dada.
- varias cosas más, que desarrollaremos en el semestre.