Solución del Primer Parcial de Matemática Inicial. Sede Maldonado

El parcial dura 1h 30 minutos y suma 35 puntos

Ejercicio 1. (10 puntos)

1. (5 puntos) En el dominio de los números reales, determine los valores de x tales que:

$$\frac{1}{x+1} \leq 1 + \frac{2}{x-1}$$

2. (5 puntos) Resolver:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x+1} = \frac{3}{2}\left(\frac{9}{4}\right)^{x^2+x-4}$$

1. Solución

$$\frac{1}{x+1} \leq 1 + \frac{2}{x-1}$$

$$\frac{1}{x+1} - 1 - \frac{2}{x-1} \leq 0$$

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-1)} - \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)} \leq 0$$

$$\frac{x-1-(x+1)(x-1)-2(x+1)}{(x+1)(x-1)} \leq 0$$

$$\frac{x-1-x^2+1-2x-2}{(x+1)(x-1)} \leq 0$$

$$\frac{-x^2-x-2}{(x+1)(x-1)} \leq 0$$

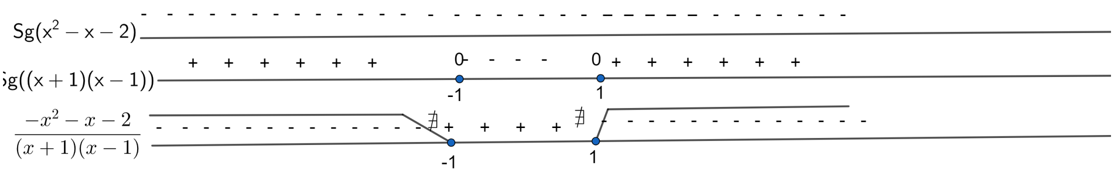
El polinomio

$$x^2-x-2$$

no tiene raíces, por lo que su signo es negativo para todo x real.

Realizamos el estudio de signo de la expresión racional:

$$\frac{-x^2 - x - 2}{(x+1)(x-1)}$$



El conjunto solución es el conjunto de reales para los que

$$\frac{-x^2 - x - 2}{(x+1)(x-1)}$$

tiene signo negativo. Es decir:

$$S = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

2.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x+1} = \frac{3}{2}\left(\frac{9}{4}\right)^{x^2+x-4}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x+1} = \frac{3}{2}\left((\frac{3}{2})^2\right)^{x^2+x-4}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x+1} = \frac{3}{2}\left((\frac{3}{2})\right)^{2(x^2+x-4)}$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x+1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2(x^2+x-4)+1}$$

$$2x + 1 = 2(x^2 + x - 4) + 1$$

$$2x^2 - 8 = 0$$

$$S = \{-2, 2\}$$

Ejercicio 2. (10 puntos)

1. (5 puntos) Sea P=”Marco es italiano” y Q=”Alain es Francés”. Formalice los siguientes enunciados:

    a) ”Marco no es italiano”

    b) ”Marco es italiano y Alain es Francés”

    c) ”Si Marco no es italianto entonces Alain no es Francés”

    d) ”Marco es Italiano o si Marco no es Italiano entonces Alain es Francés”

    e) ”Marco es Italiano y Alain es Francés o ni Marco es Italiano ni Alain es Francés”

2. (5 puntos) Pruebe que la siguiente afirmación es falsa.

    Para todo $x > 0 \qquad \log(x)/x < x - 2$

1. Solución

    a) $\neg P$

    b) $P \wedge Q$

    c) $\neg P \longrightarrow \neg Q$

    d) $P \vee (\neg P \longrightarrow Q)$

    e) $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

2. Un contraejemplo es $x = 1$

Ejercicio 3. (15 puntos)

1. (10 puntos) Pruebe por inducción completa que

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

2. (5 puntos) Halle:

$$\sum_{i=1}^{998} (i+2)^3$$

1. Solución

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

    Base inductiva

$$\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1^3 = 1$$

$$\frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

    Hipótesis inductiva

$$\sum_{i=1}^{h} i^3 = \frac{h^2(h+1)^2}{4}$$

    Tesis

$$\sum_{i=1}^{h+1} i^3 = \frac{(h+1)^2(n+1+1)^2}{4}$$

Demostración

$$\sum_{i=1}^{h+1} i^3 = \sum_{i=1}^{h} i^3 + \sum_{i=h+1}^{h+1} i^3 =$$

$$= \frac{h^2(h+1)^2}{4} + \sum_{i=h+1}^{h+1} i^3$$

$$= \frac{h^2(h+1)^2}{4} + (h+1)^3 = \frac{h^2(h+1)^2 + 4(h+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(h+1)^2[h^2 + 4(h+1)]}{4} = \frac{(h+1)^2(h+2)^2}{4}$$

que es igual al segundo miembro de la tesis.

2.

$$\sum_{i=1}^{998}(i+2)^3 = \sum_{i=1}^{1000} i^3 - \sum_{i=1}^{2} i^3$$

Observar que la suma del primer miembro es $3^3 + 4^3 + ... + 1000^3$