Matemática 1
Segundo Parcial

CURE

8 de Julio de 2024

Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deber utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva.Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.

Problema 1 [15 pts.]

(a) Encontrar la función f, el real λ y el valor de $\int_0^1 f(t)\,dt$ sabiendo que $\int_\lambda^x f(t)\,dt = (x-1)^4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

(b) Calcular: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\int_0^{x^2} sin(\sqrt{t})\,dt}{x^3}$

(c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = e^x sin(x)$. Hallar una primitiva de f tal que su gráfico pase por el punto de coordenadas $(0, -1)$.

Problema 2 [10 pts.]

(a) Se llama función de densidad a una función $f : R \to \mathbb{R}$, tal que es no negativa, continua (salvo en un número finito de puntos) y $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

Sea $f : f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le 0 \\ kxe^{-x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

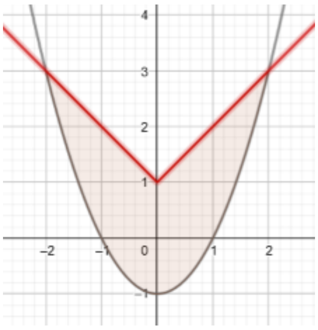
i. Halla k para que f sea una función de densidad.

ii. Hallar $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

(b) Sean las funciones f y g tales que

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si} \quad x < 0 \\ 1+x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = x^2 - 1$$

cuyos gráficos se muestra a continuación, hallar el área sombreada.



Problema 3 [15 pts.]

Sea $(a_n) : a_0 = \dfrac{1}{2}, \qquad a_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - a_n}$

(a) Probar que $0 \leq a_n \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Probar que (a_n) es monótona decreciente.

(c) Justificar que (a_n) es convergente y calcular su límite.

Problema 4 [10 pts.]

Clasificar las siguientes series y en caso de convergencia, si es posible, calcular la suma.

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{6^n}{n!}$ (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{3e^{3n}}$

Solución

Problema 1

(a)

$$F(x) = \int_{\lambda}^{x} f(t)\,dt = (x-1)^4 \Rightarrow f(x) = F^{'}(x) = 4(x-1)^3 \qquad (1)$$

$$F(x) = \int_{\lambda}^{x} 4(t-1)^3\,dt = (x-1)^4 - (\lambda-1)^4 = (x-1)^4 \Rightarrow \lambda = 1 \qquad (2)$$

$$\int_{0}^{1} 4(t-1)^3\,dt = (t-1)^4|_0^1 = -1 \qquad (3)$$

(b)

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} sin(\sqrt{t})\,dt}{x^3}$$

es una indet $\frac{0}{0}$. Aplicando L'Hopital se obtiene:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2sen(x)}{3x}$$

aplicando nuevamente L'Hopital,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{2cos(x)}{3} = \frac{2}{3}$$

(c) Se calcula la integral de:

$$F(x) = \int e^x sin(x) dx$$

aplicando partes 2 veces,

$$F(x) = \frac{-cos(x)e^x + e^x sen(x)}{2} + K$$

Para obtener una primitiva que cumpla la condición, se impone que $F(0) = 1$, por lo tanto $K = \frac{3}{2}$. La primitiva es:

$$F_1(x) = \frac{-cos(x)e^x + e^x sen(x)}{2} + \frac{3}{2}$$

Problema 2

(a) **i)** Para que f sea función de densidad tiene que integrar 1, por lo tanto:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} kxe^{-x}dx = k = 1$$

ii)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{0}^{x} kte^{-t}dt = k(t+1)e^{-t}|_0^x = -k((x+1)e^{-x} - 1)$$

(b) El problema es simétrico y se cortan en $x = 2$ por lo tanto:

$$A = 2(-\int_0^1 x^2 - 1\ dx - \int_1^2 x^2 - 1\ dx + \int_0^2 1 + x\ dx) = \frac{20}{3}$$

Otra forma de resolverlo, es hacer la función compuesta $x^2 - 1$ con $1 + x$, luego integrar entre 0 y 2.

Problema 3

(a) **Bi)**

$$0 \leq a_0 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \leq 1$$

Hi)

$$0 \leq a_{n-1} \leq 1$$

Ti)

$$0 \leq a_n \leq 1$$

$$a_n = 1 - \sqrt{1 - a_{n-1}} \Rightarrow (1 - a_n)^2 = 1 - a_{n-1}$$

por **Hi** $0 \leq a_{n-1} \leq 1$

$$0 \leq (1 - a_n)^2 \leq 1$$

por lo tanto,

$$0 \leq a_n \leq 1$$

(b)

$$a_{n+1} < a_n \Longleftrightarrow 1 - a_n < \sqrt{1 - a_n}$$

$$1 - a_n < \sqrt{1 - a_n} \Longleftrightarrow a_n^2 - a_n < 0$$
$$a_n^2 - a_n < 0 \Longleftrightarrow a_n(a_n - 1) < 0$$

$$a_n(a_n - 1) < 0 \Longleftrightarrow 0 < a_n < 1$$

(c) La sucesión esta acotada inferiormente por 0 (parte a) y es monotona decreciente (parte b), por lo tanto converge, y su limite es 0.

Problema 4

(a) Usando d'Alembert con $a_n = \frac{6^n}{n!}$:

$$\lim_n \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_n \frac{6}{n+1} = 0 = L < 1$$

por lo tanto converge.

(b)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5}{3e^{3n}} = \frac{5}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{e^3})^n$$

es una serie geométrica, converge ya que $|r| = |\frac{1}{e^3}| < 1$