

Práctico 9: Grafos III

Planaridad y Coloración de Grafos

Ref. Grimaldi Secciones 11.4 y 11.6

PLANARIDAD

Ejercicio 1. Dibuje una inmersión en el plano de K_4 , otra del cubo y otra de $K_{2,8}$.

Ejercicio 2. Indique cuales de los multigrafos de la Figura 1 son homeomorfos.

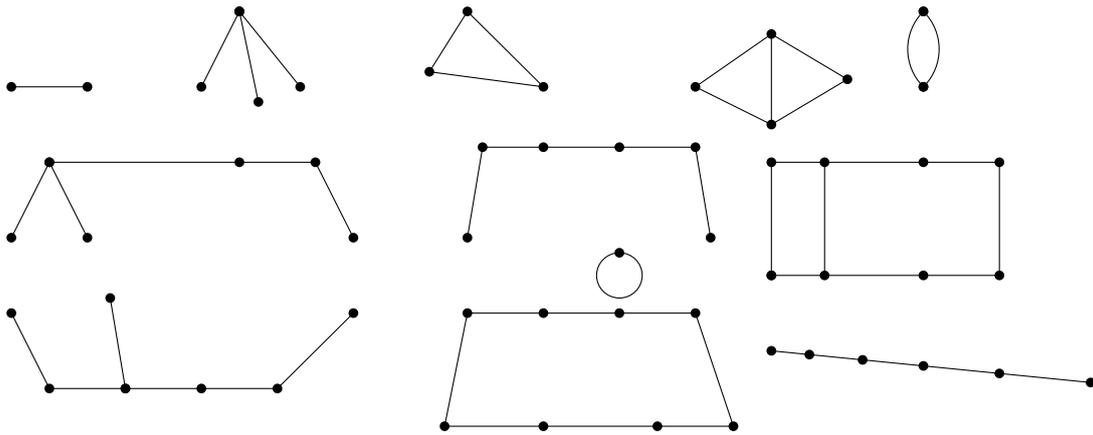


Figura 1: Ejercicio 2

Ejercicio 3. Para los pares de grafos homeomorfos de la Figura 2 obtenga un tercero desde el cual los dos primeros se obtengan por subdivisiones elementales.

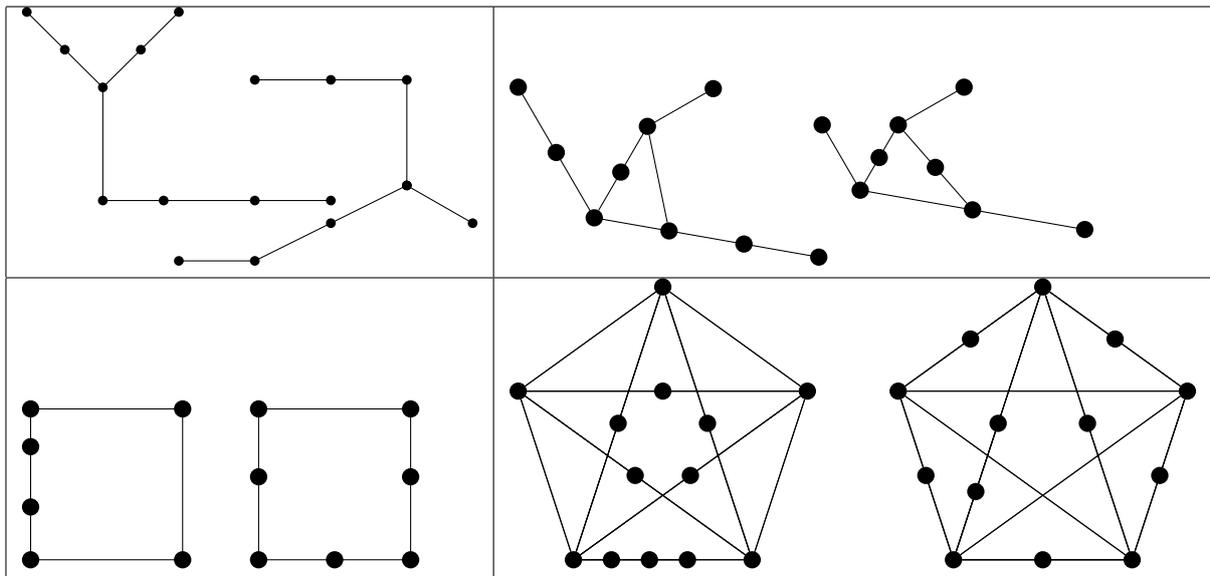


Figura 2: Ejercicio 3

Ejercicio 4. Muestre que si se elimina cualquier arista de K_5 , el subgrafo resultante es plano. ¿Es esto cierto para el grafo $K_{3,3}$?

Ejercicio 5. Probar que todo grafo acíclico es plano.

Ejercicio 6. Determine cuáles de los grafos de la Figura 3 son planos. Si un grafo es plano, vuelva a dibujarlo sin aristas solapadas. Si no es plano, encuentre un subgrafo homeomorfo a K_5 , o $K_{3,3}$.

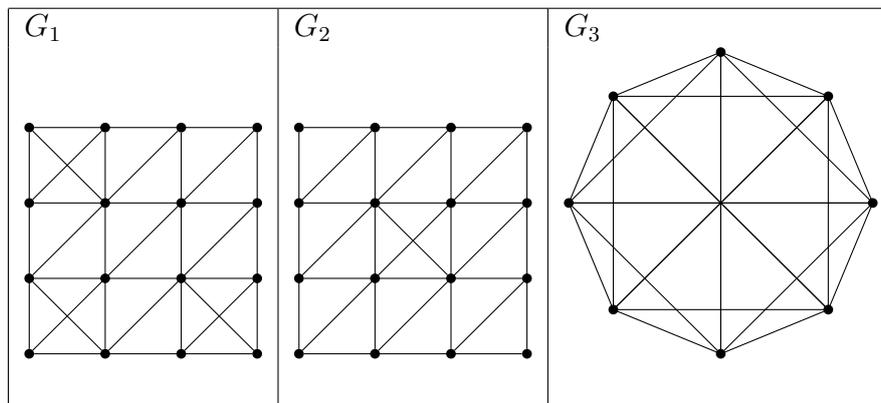


Figura 3: Ejercicio 8

Ejercicio 7. Sea $G = (V, E)$ un grafo no plano. ¿Cuál es el valor más pequeño que puede tener $|E|$?

Ejercicio 8. Determine el número de vértices, aristas y regiones para cada uno de los grafos planos de la Figura 3. Luego muestre que sus respuestas satisfacen el teorema de Euler para grafos planos conexos.

Ejercicio 9. Sea $G = (V, E)$ un grafo plano 4-regular conexo sin lazos. Si $|E| = 16$, ¿cuántas regiones hay en una representación plana de G ?

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS (PLANARIDAD)

Ejercicio 10. Suponga que $G = (V, E)$ es un grafo plano con k componentes conexas sin lazos con $|V| = v$, $|E| = e$. Establezca y demuestre una extensión del teorema de Euler para este grafo.

Ejercicio 11. a) ¿Cuántas aristas tiene un grafo conexo 3-regular plano sin lazos y con ocho vértices?
 b) Dibuje un grafo que satisfaga las condiciones de la parte anterior y otro que las satisfaga todas menos la de ser plano.

Ejercicio 12. Sea $G = (V, E)$ un grafo plano y cuyas inmersiones planas determinan 53 regiones. Si para alguna inmersión plana de G cada región tiene al menos cinco aristas en su frontera, demuestre que $|V| \geq 82$.

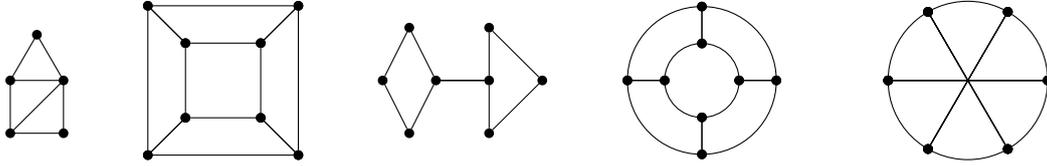
Ejercicio 13.

1. Demuestre que todo grafo plano tiene un vértice de grado 5 o menor.
2. Demuestre que todo grafo plano con menos de 30 aristas tiene un vértice de grado 4 o menor.
3. Demuestre que en toda inmersión de un grafo plano y conexo con 6 vértices y 12 aristas, cada una de las regiones está limitada por 3 aristas.
4. Demuestre que para todo grafo conexo G con 11 o más vértices, o bien él o su complemento \overline{G} no es plano.

COLORACIÓN DE GRAFOS

Ejercicio 14. Encuentre el número cromático de los siguientes grafos.

- El grafo bipartito completo $K_{m,n}$.
- El ciclo C_n , para $n \geq 3$.
- Los grafos de la Figura.



Ejercicio 15. Demuestra que $\chi(G) = 2$ si y solo si G no tiene ciclos impares.

Ejercicio 16. Sea $G = (V, E)$ un grafo, donde $\Delta = \max_{v \in V} \text{grad}(v)$.

- Demuestre que $\chi(G) \leq \Delta + 1$.
- Encuentre dos tipos de grafos G tales que $\chi(G) = \Delta + 1$.

Ejercicio 17. En los laboratorios químicos JJ, Juanita recibe tres embarques que contienen un total de siete sustancias químicas diferentes. La naturaleza de estas sustancias es tal que para todo $1 \leq i \leq 5$, la sustancia i no puede almacenarse en el mismo compartimiento que la sustancia $i + 1$ o la $i + 2$. Determine el menor número de compartimientos separados que Juanita necesitará para almacenar en forma segura estas siete sustancias.

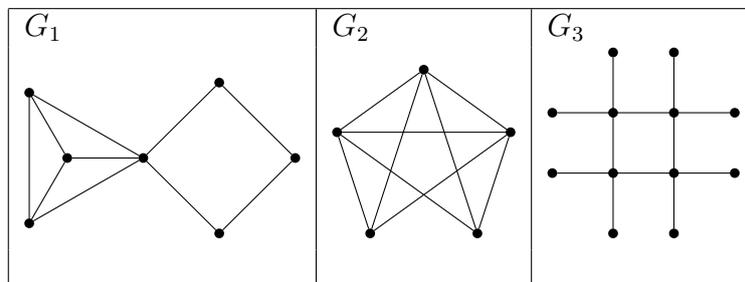
Ejercicio 18. a) Determine $P(K_{1,3}, \lambda)$.

- ¿Cuál es el polinomio cromático de $K_{1,n}$? ¿Cuál es su número cromático?
- ¿Cuáles son los polinomios cromáticos de P_n ?
- ¿Cuál es el polinomio cromático de un árbol con n nodos?
- A partir de la parte anterior encuentre el número cromático de un árbol con n nodos.

Ejercicio 19. Hallar el polinomio cromático de $K_{2,n}$.

Ejercicio 20. a) Determine los polinomios cromáticos para los grafos de la Figura.

- Encuentre $\chi(G)$ para cada grafo.
- Si se dispone de cinco colores, ¿cuántas coloraciones propias de los vértices de cada grafo existen?



EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS (COLORACIÓN DE GRAFOS)

Ejercicio 21. Sea G un grafo con 5 vértices cuyo polinomio cromático evaluado en 4 vale 0, esto es

$$P(G; 4) = 0.$$

Indique la opción correcta

1. G posee dos aristas e y f incidentes, tales que si $H = G - e - f$, entonces $P(H; 4) = 48$.
2. G no posee aristas incidentes.
3. G posee dos aristas e y f incidentes, tales que si $H = G - e - f$, entonces $P(H; 4) = 47$.
4. G posee dos aristas e y f incidentes, tales que si $H = G - e - f$, entonces $P(H; 4) = 46$.
5. Ninguna de las anteriores.

Ejercicio 22. Para cada natural k encontrar o demostrar que no existe un número infinito de grafos conexos planos (no isomorfos) y k -regulares .

Ejercicio 23. Sea G un grafo con 4 vértices. Si se sabe que existe una arista e de G tal que $P(G - e; 2) = P(G; 2) = 2$, hallar $P(G; 3) = 15$.

Ejercicio 24. Dé un ejemplo de un grafo $G = (V, E)$ tal que $\chi(G) = 3$ pero que ningún subgrafo de G sea isomorfo a K_3 .