

Práctico 8: Grafos II

Isomorfismo, grado, circuitos Eulerianos

Ref. Grimaldi Sección 11.2, 11.3

ALGUNAS DEFINICIONES

Todos los grafos se supondrán simples, es decir, sin aristas múltiples ni lazos. El *orden* de un grafo es la cantidad de vértices. Un vértice es *aislado* si no es adyacente a ningún otro (grado 0). Un vértice es *colgante* si tiene grado 1. El *grafo complemento* \bar{G} de un grafo $G = (V, E)$ se define como $\bar{G} = (V, \bar{E})$ donde \bar{E} son todas las aristas posibles que no están en E . Un grafo G se dice *autocomplementario* si G es isomorfo a \bar{G} .

ISOMORFISMO

Ejercicio 1. Encuentre todos los árboles con 6 vértices, a menos de isomorfismo.

Ejercicio 2.

- a) Demuestre que dos grafos son isomorfos si y solo si sus grafos complemento lo son.
- b) ¿Cuáles de los grafos de la Figura 1 son isomorfos?

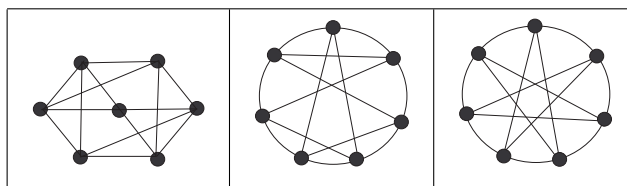


Figura 1

- c) Determine el número de aristas de \bar{G} en función del número de aristas de G .
- d) Determine el número de aristas de un grafo autocomplementario de orden n .
- e) Construya un grafo autocomplementario de orden 4 y otro de orden 5.
- f) Determine para qué valores de n existe un grafo autocomplementario de orden n .

Ejercicio 3. Para cada par de grafos de la Figura 2 determine si los grafos son o no isomorfos.

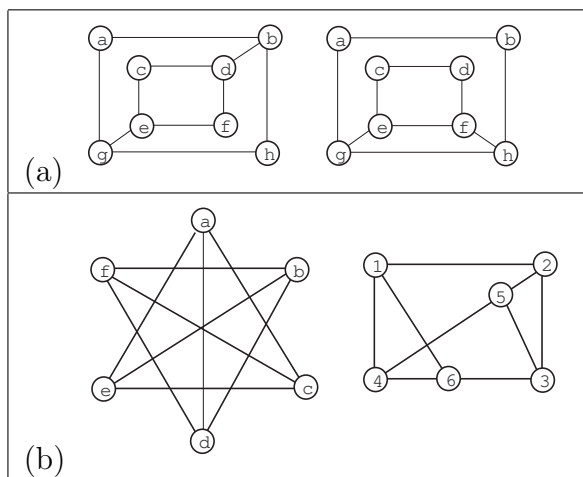


Figura 2

GRADO

Ejercicio 4.

- Determine el orden de un grafo 3-regular con 9 aristas.
- Ídem con 10 aristas, dos vértices de grado 4 y los demás de grado 3.
- ¿Existen tales grafos? En caso afirmativo construirlos.

Ejercicio 5. En una clase con 9 alumnos, cada alumno le manda 3 tarjetas de navidad a otros 3. ¿Es posible que cada alumno reciba tarjetas de los mismos 3 compañeros a los cuales él le mando una?

Ejercicio 6. Sea G un grafo con n vértices. ¿Cuántos vértices de \bar{G} tienen grado par si G tiene un sólo vértice de grado par?

Ejercicio 7.

- ¿Cuál es el máximo orden posible para un grafo con 17 aristas si todos sus vértices tienen grado mayor o igual a 3?
- ¿Existe algún grafo con dicha cantidad de vértices? En caso afirmativo construirlo.

Ejercicio 8. Para todo natural par $n \geq 4$ construya un grafo conexo 3-regular con n vértices.

Ejercicio 9. ¿Cuántas hojas (vértices colgantes) tiene un árbol con cuatro vértices de grado 2, uno de grado 3, dos de grado 4 y uno de grado 5?

CIRCUITOS Y RECORRIDOS EULERIANOS

Ejercicio 10. Halle un recorrido o un circuito euleriano para cada grafo de la Figura 3 o demuestre que no existe.

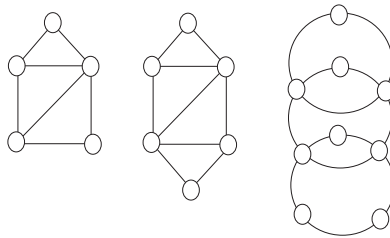


Figura 3

Ejercicio 11. Encuentre un recorrido euleriano para $G = (V, E)$ con $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ y $E = \{ab, ac, ai, aj, bc, cd, ci, de, df, dg, dh, ef, fg, fh, gh, hi, ij\}$.

Ejercicio 12.

- Determine los valores de n para los cuales el grafo completo K_n tendrá un circuito euleriano.
- ¿Para cuáles n tiene K_n un recorrido euleriano?

Ejercicio 13. Encuentre la longitud máxima de un recorrido en a) K_6 ; b) K_8 ; c) K_{10} ; d) K_{2n} , $n \in \mathbb{N}$.

EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

Ejercicio 14. Demuestre que todo grafo conexo con 2 o más vértices tiene dos vértices con el mismo grado.

Ejercicio 15. ¿Cuántos vértices tiene un árbol con 16 vértices de grado 1, 20 vértices de grado 2, y el resto de grado 4?

Ejercicio 16. Sea G un grafo acíclico, con n vértices y k componentes conexas. Hallar cuántas aristas tiene G .