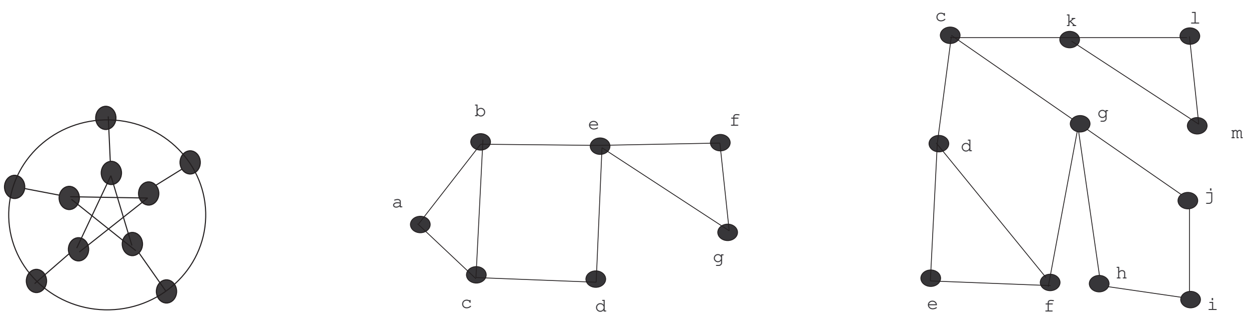
Matemática Discreta 1 - 2024

Práctico 7: Grafos y árboles

Ref. Grimaldi Sección 11.1, 11.2, 12.1

Algunas definiciones

Todos los grafos se supondrán simples, es decir, sin artistas múltiples ni lazos. El *grafo completo* K_n tiene n vértices todos unidos entre sí. El *grafo bipartito completo* $K_{n,m}$ tiene $n+m$ vértices n de los cuales están unidos a los otros m, y esas son las únicas adyacencias. El *camino simple* P_n tiene n vértices y todo él es un camino simple. El n*–ciclo* C_n tiene n vértices y todo él es un ciclo. El *grafo de Petersen* es el de la Figura (1a). Un grafo es un *árbol* si es conexo y no tiene ciclos.



(a) Grafo de Petersen (b) (c)

Figura 1

La *distancia* entre dos vértices a y b de un grafo conexo es la menor de las longitudes de los caminos que los unen. Por ejemplo, la distancia entre el vértice "c" y el vértice "m" del grafo de la Figura (1c) es 2. El *diámetro* de un grafo conexo es la mayor de las distancias entre dos vértices cualesquiera. Por ejemplo, el diámetro de P_4 es 3 y el de C_5 es 2.

Ejercicio 1 Para el grafo de la Figura (1b), determine:

a) Un camino de b a d que no sea un recorrido.
b) Un recorrido de b a d que no sea simple.
c) Un camino simple de b a d.
d) Un camino cerrado que no sea un circuito.
e) Un circuito que no sea simple.
f) Todos los circuitos simples que pasan por b.
g) Todos los recorridos simples de b a f.
h) Todos los ciclos.

Ejercicio 2
a) ¿Cuál es la distancia entre d y los demás vértices del grafo de la Figura 1c?
b) Halle el diámetro de K_n, $K_{n,m}$, P_n, C_n y del grafo de Petersen (Figura (1a)).

Ejercicio 3 Determine si se cumple o no que:
a) K_4 contiene un camino que no es un recorrido.
b) K_4 contiene un recorrido que no es simple y no es un circuito.
c) K_4 contiene un circuito que no es simple.

Ejercicio 4 ¿Cuántos caminos simples tiene P_4? ¿Y $K_{1,4}$? ¿Y P_n? ¿Y $K_{1,n}$?

Ejercicio 5 Sea K_{12} el grafo completo con exactamente 12 vértices. ¿Cuántos caminos simples de longitud 2 tiene K_{12}?

Ejercicio 6 ¿Cuántos caminos de largo n hay entre dos vértices opuestos de C_4?

Ejercicio 7 Para cada natural $n \geq 3$ se define el grafo *rueda de n rayos* como el grafo W_n con $n+1$ vértices v_0, v_1, …, v_n tal que v_0 es adyacente a todos los demás vértices y $v_1, \ldots, v_n, v_1$ es un ciclo. En la Figura 2 se muestran W_3, W_4 y W_5.

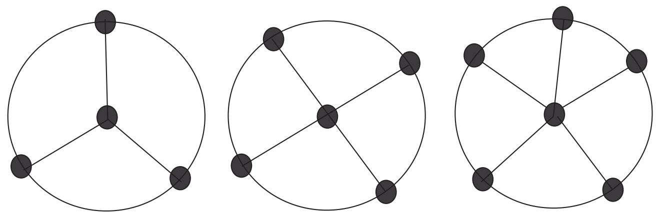


Figura 2: W_3, W_4 y W_5

a) ¿Cuántas aristas tiene W_n?
b) ¿Cuántos 3-ciclos de tiene W_3? ¿y W_4?
c) ¿Cuántos 4-ciclos de tienen W_3, W_4 y W_5?
d) Ídem para 5-ciclos.
e) Ídem para 6-ciclos.
f) Determine cuántos k-ciclos tiene W_n.

Ejercicio 8 Pruebe que si P y Q son dos recorridos simples de longitud la mayor posible, en un grafo conexo, entonces tienen un vértice en común.

Ejercicio 9 Sea G el grafo con conjunto de vértices $\{1, 2, \ldots, 15\}$ donde el vértice i es adyacente al j si y solo si su máximo común divisor es mayor que 1. ¿Cuántas componentes conexas tiene G?

Ejercicio 10 Un hombre debe cruzar un perro, una oveja y una bolsa de repollos, que están en la otra margen del río, por medio de una canoa. El tamaño de la canoa no permite llevar más de un objeto a la vez y se entiende que luego de cruzar uno de estos no vuelve hacia atrás inmediatamente después con el mismo objeto. Además, no se puede dejar al perro sólo con la oveja ni a la oveja sola con la bolsa de repollos.

1. ¿Cómo se podrá hacer?
2. ¿Puede el hombre realizar el proceso si ha de hacer exactamente 20 viajes? (Un viaje es ir de una margen del río a la otra).

Sugerencia: asociar a cada disposición factible un vértice y unir dos vértices si se puede pasar de dicha disposición a la otra en un solo viaje.

Árboles

Ejercicio 11 ¿Cuántas aristas tiene un árbol con n vértices?

Ejercicio 12 ¿Cuántos vértices tiene un árbol con 16 vértices de grado 1, 20 vértices de grado 2 y el resto de grado 4?

Ejercicio 13 Demuestre que la cantidad de componentes conexas de un grafo con n vértices y m aristas es mayor o igual a $n - m$.
Sugerencia: proceda por inducción en m o si quiere en n. Otra forma es considerar un árbol recubridor para cada componente conexa del grafo.

Ejercicio 14 De un ejemplo de un grafo G que no sea un árbol y que tenga un vértice más que el número de aristas.

Ejercicios complementarios

Ejercicio 15 Halle el máximo número de aristas que se le puede quitar a K_6 sin que el grafo deje de ser conexo.

Ejercicio 16 Halle el mínimo número de aristas que hay que quitarle a K_6 para que quede desconectado en 2 componentes conexas, ninguna de las cuales sea un vértice aislado.

Ejercicio 17 El hipercubo H_n de dimensión n, es el grafo cuyos vértices son las n-uplas de ceros y unos, tales que dos n-uplas son adyacentes si coinciden en todas sus coordenadas salvo exactamente en una de ellas. a) Halle los conjuntos de vértices de H_1, H_2, H_3 y dibuje dichos grafos.
b) ¿Cuántos vértices y aristas tiene H_n?
c) Halle 2 caminos simples en H_5 de $(0, 0, 1, 1, 0)$ a $(0, 0, 0, 1, 0)$.
d) Demuestre que H_n no tiene 3-ciclos.
e) ¿Cuántos 4-ciclos tiene H_n?
Sugerencia: considere un vértice fijo y cuente cuántos 4-ciclos pasan por él.

Ejercicio 18 Sea G_n el grafo con vértices las n-uplas de 0s y 1s:

$$V(G_n) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \{0, 1\}\}$$

Dos n-uplas serán adyacentes si difieren en los valores de exactamente dos de sus posiciones, coincidiendo en el resto. Por ejemplo, en G_n, $(0, 0, 1)$ es adyacente a $(1, 1, 1)$ y a $(1, 0, 0)$, pero no a $(1, 1, 0)$.
a) Dibuje G_2, G_3 y G_1.
b) ¿Para qué valores de n es G_n conexo?
Sugerencia: sume los 1s de cada vértice.
c) ¿Cuántas componentes conexas tiene G_n?