Segundo Parcial

Viernes 31 de mayo de 2024

Apellido, Nombre	Firma	Cédula

Ejercicio 1. Resuelva la ecuación

$$a_{n+2} - 6\,a_{n+1} + 8\,a_n = 4 \cdot 2^n\,, \quad n \geq 0$$

con $a_0 = a_1 = 0$.

(i) Ec homogénea $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 8a_n = 0$

$a_n = r^n \rightarrow r^2 - 6r + 8 = 0 \rightsquigarrow r = \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a_n^H = A \cdot 2^n + B \cdot 4^n}$

(ii) Sol particular: $a_n = C \cdot 2^n$ no sirve por ser sol. de la homogénea.

$a_n = C \cdot n \cdot 2^n \rightsquigarrow C(n+2)2^{n+2} - 6C(n+1)2^{n+1} + 8Cn2^n \stackrel{?}{=} 4 \cdot 2^n$

$$\| $$

$$\underbrace{\cancel{(4C - 12C + 8C)}}_{=0} n \cdot \cancel{2^n} + (8C - 12C)\cancel{2^n} \stackrel{?}{=} 4 \cdot \cancel{2^n}$$

$$\| $$

$-4C = 4 \longrightarrow C = -1$

$\boxed{a_n^P = -n2^n}$

(iii) Solución: $a_n = A\,2^n + B\,4^n - n2^n$

cond iniciales

$$\left.\begin{aligned} 0 = a_0 &= A + B \\ 0 = a_1 &= 2A + 4B - 2 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} A + B &= 0 \\ A + 2B &= 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} B &= 1 \\ A &= -1 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Sol: } a_n = 4^n - (n+1)\,2^n}$

Ejercicio 2. En condiciones de laboratorio, la bacteria E. Coli tiene una tasa de duplicación de 20 minutos: es decir, la población de bacterias para cualquier tiempo T se duplica en T + 20 minutos.

a. Defina una relación de recurrencia que determine el comportamiento de la población de bacterias. Explique qué representa el término general de dicha recurrencia.

b. Suponiendo que, al cabo de 4 horas de observación, hay entre 1.9 y 2.5 millones de bacterias, halle un rango razonable para la cantidad inicial de bacterias.

(a) $a_n =$ # bactrias al cabo de $20 \cdot n$ minutos

$$a_{n+1} = 2a_n$$

(b) $a_n = k \cdot 2^n$ 4 horas $= 12 \cdot 20$ minutos.

$$a_{12} > 1.9e^6 = k \cdot 2^{12} \Rightarrow k > \frac{1.9e^6}{4.1e^3} \approx 460$$

$$a_{12} < 2.5e^6 = k \cdot 2^{12} \Rightarrow k < \frac{2.5e^6}{4.1e^3} \approx 610$$

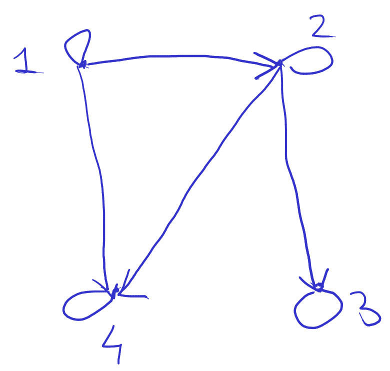
$a_0 = k \rightsquigarrow$ $\boxed{a_0 \text{ entre } 460 \text{ y } 610}$

Ejercicio 3.

a. Sean $A = \{1,2,3,4\}$ y $R = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(4,4)\}$ relación sobre A.

i. Dibuje el grafo dirigido correspondiente a R.

ii. Determine si R es reflexiva, simétrica, antisimétrica, y/o transitiva.



es reflexiva: tiene todos los lazos

No es simétrica pues $(1,2) \in R$
$(2,1) \notin R$

es antisimétrica: No hay dos aristas entre ningún par de vértices

No es transitiva:
$(1,2) \in R$, $(2,3) \in R$, $(1,3) \notin R$

b. Sean $A = \{1,2,3,4\}$ y $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(4,4),(4,5),(5,4),(5,5),(6,6)\}$ una relación de equivalencia sobre A.

i. Determine [1], [2] y [3].

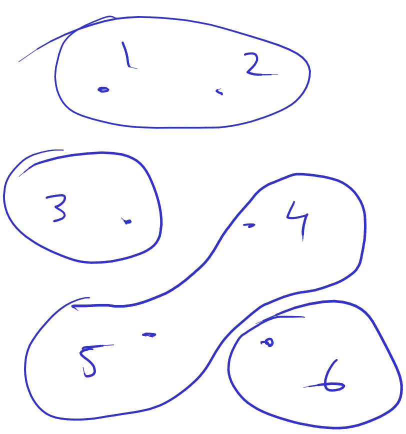
ii. Describa la partición de A inducida por R.

$[1] = \{1,2\} = [2]$

$[3] = \{3\}$

$[4] = \{4,5\} = [5]$

$[6] = \{6\}$



$P = \{[1],[3],[4],[6]\}$