

Primer Parcial

Viernes 26 de abril de 2024

Apellido, Nombre	Firma	Cédula

Ejercicio 1.

a. Calcule la cantidad de palabras que se pueden formar permutando las letras de la palabra

LENTAMENTE

$$\begin{array}{l}
 1L \\
 3E \\
 2N \\
 2T \\
 1A \\
 1M
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 1L \\ 3E \\ 2N \\ 2T \\ 1A \\ 1M \end{array}} \right\} \rightarrow \frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5$$

b. Calcule la cantidad de éstas palabras que además cumplen las dos siguientes condiciones:

- i. Comienzan y terminan en T.
- ii. Contienen la palabra MAL en alguna parte.

Para escribir una palabra con esa letra

- ① escribiremos una palabra con 3E, 2N, 1M
- ② agregamos AL inmediatamente después de la M
- ③ agregamos un T al principio y uno al final

$$\begin{array}{l}
 ① \rightsquigarrow \frac{6!}{3! \cdot 2!} \\
 ② \rightsquigarrow 1 \text{ opción} \\
 ③ \rightsquigarrow 1 \text{ opción}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} ① \rightsquigarrow \frac{6!}{3! \cdot 2!} \\ ② \rightsquigarrow 1 \text{ opción} \\ ③ \rightsquigarrow 1 \text{ opción} \end{array}} \right\} \rightarrow \frac{6!}{3! \cdot 2!} = 60$$

Ejercicio 2. Una orquesta sinfónica tiene 79 músicos agrupados en cuatro categorías:

- Cuerdas: 16 primeros violines, 14 segundos violines, 10 violonchelos y 8 contrabajos.
- Vientos de madera: 1 flautín, 2 flautas, 2 oboes, 1 corno inglés, 2 clarinetes y 2 fagots.
- Vientos de metal: 5 trompetas, 6 trompas, 3 trombones tenores, 2 trombones bajos y una tuba.
- Percusión: 2 timbales, 1 marimba y 1 gong.

El director de la orquesta debe seleccionar 12 músicos para una obra que consta de: 8 cuerdas, conformadas por 3 primeros violines, 3 segundos violines y 2 violonchelos; 2 vientos de madera cualesquiera; ningún viento de metal; 1 instrumento de percusión cualquiera. ¿De cuántas maneras distintas se pueden convocar músicos para la obra?

$$\binom{16}{3} \times \binom{14}{3} \times \binom{10}{2} \times \binom{10}{2} \times \binom{4}{1}$$

\uparrow \uparrow \uparrow \uparrow \uparrow
 1er violines 2do violines chelos vientos de madera percusión.

Ejercicio 3.

a. Halle la cantidad de soluciones enteras no negativas de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 23$.

Hay que elegir 23 de 3 opciones, es decir

$$CR_{23}^3 = \binom{25}{23} = \frac{25 \times 24}{2} = 300$$

b. Halle la cantidad de soluciones que cumplen $2 \leq x_1 \leq 6$, $2 \leq x_2 \leq 6$, $4 \leq x_3$.

Tomando $x_1 = 2 + y_1$, $x_2 = 2 + y_2$, $x_3 = 4 + y_3$, la ecuación resulta

$$y_1 + y_2 + y_3 = 15 \quad \text{con} \quad y_1 \leq 4, \quad y_2 \leq 4.$$

$$\text{Calculamos: } N(y_1 \geq 5, y_2 \geq 5) = CR_5^3 = \binom{7}{5} = 21$$

$$N(y_1 \geq 5) = CR_{10}^3 = \binom{12}{10} = 66$$

$$N(y_2 \geq 5) = CR_{10}^3 = \binom{12}{10} = 66$$

$$N_{\text{total}} = CR_{15}^3 = \binom{17}{15} = 136$$

Por inclusión-exclusión tenemos:

$$N(y_1 \leq 4, y_2 \leq 4) = N - N(y_1 \geq 5) - N(y_2 \geq 5) + N(y_1 \geq 5, y_2 \geq 5).$$

$$136 - 66 - 66 + 21 = 25$$

Ejercicio 4. Se define una sucesión de enteros dada por

$$a_0 = 0; \quad a_{n+1} = a_n + 3n^2 \text{ para } n \geq 0.$$

Usar el principio de inducción completa para demostrar que

$$a_n \leq n^3$$

para todo $n \geq 0$.

Paso base: $n=0$ $a_0 = 0 \leq 0^3 = 0$ ✓

Paso inductivo:

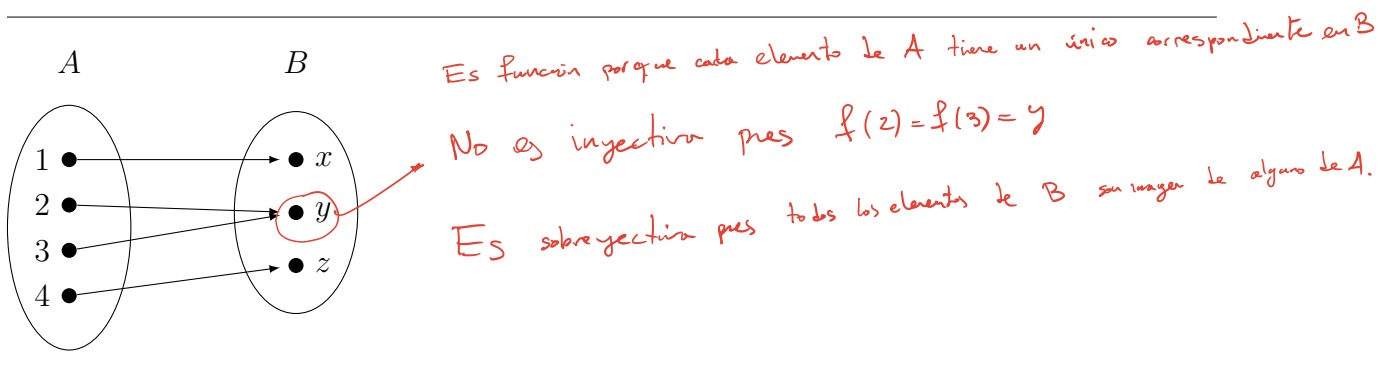
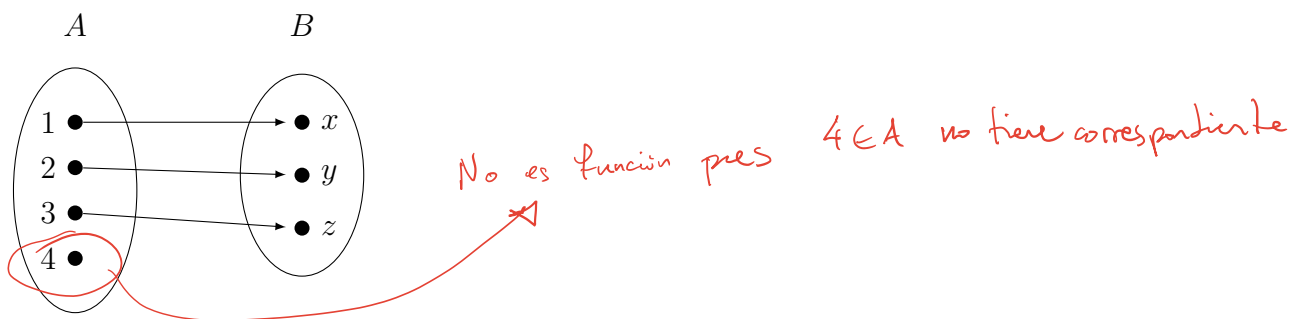
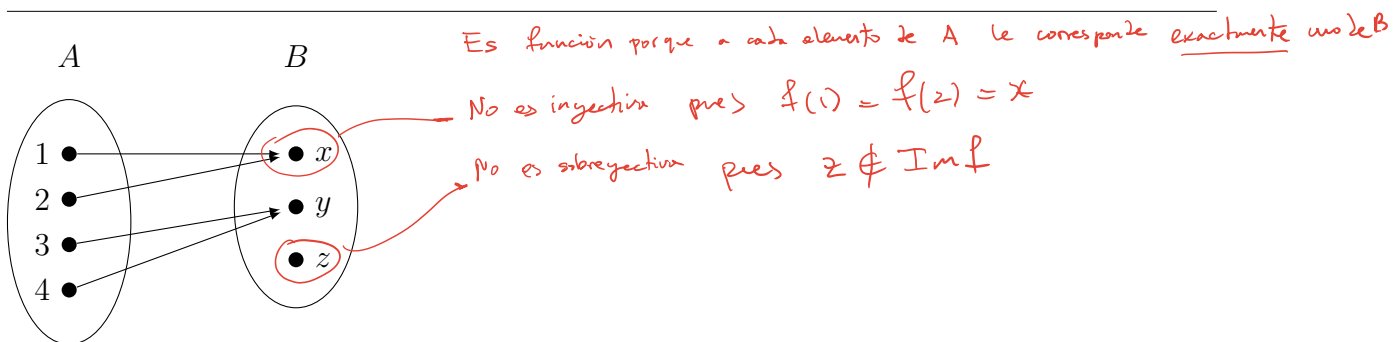
(HI) $a_k \leq k^3$

(TI) $a_{k+1} \leq (k+1)^3$

Dem: $a_{k+1} = a_k + 3k^2 \leq \underset{\text{(HI)}}{k^3} + 3k^2 \leq \underset{k \geq 0}{k^3 + 3k^2 + 3k + 1} = (k+1)^3$ ✓

Ejercicio 5.

- a. Se consideran los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{x, y, z\}$. Para cada uno de los siguientes diagramas, determine si representa una función de A en B . En caso afirmativo, indique si la función es inyectiva, sobreyectiva, y/o biyectiva. Justifique todas sus respuestas.



- b. Determine la cantidad de funciones inyectivas de A en B .

Como $\#A > \#B$, no hay ninguna función inyectiva de A en B .