Matemática Discreta 1 - 2024

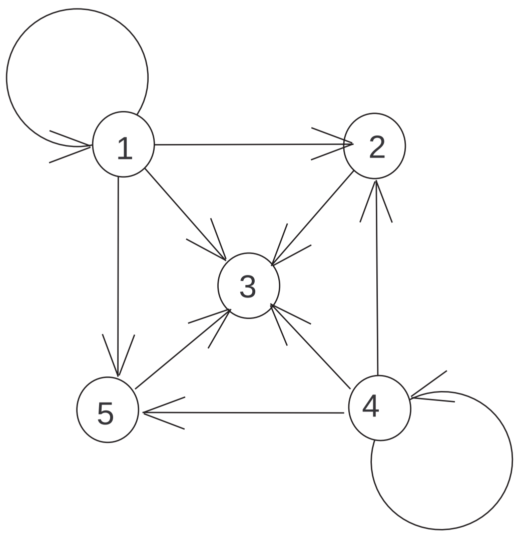
Práctico 5: Relaciones

Ref. Grimaldi Secciones 5.1, 7.1, 7.2, 7.3, 7.4

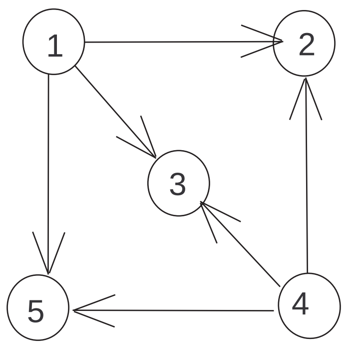
Relaciones de Equivalencia

Aclaración: En todos los ejercicios R^{-1} denota la relación inversa, i.e. $R^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in R\}$, y $\overline{R}$ la relación complementaria, i.e., $\overline{R} = \{(x, y) : (x, y) \notin R\}$.

Ejercicio 1 Determine si las siguientes relaciones son reflexivas, irreflexivas ($\forall x, (x, x) \notin R$), simétricas, antisimétricas, asimétricas ($(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$) o transitivas en $A = \{1, 2, 3, 4\}$:
(a) $\{(1, 1); (1, 2); (2, 1); (2, 2); (3, 3); (3, 4); (4, 3); (4, 4)\}$.
(b) $\{(1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 3); (2, 4); (3, 4)\}$.
(c) $\{(1, 3); (1, 1); (3, 1); (1, 2); (3, 3); (4, 4)\}$.
(d) $\emptyset$.
(e) $A \times A$.
(f) y (g) Para estos puntos tomar $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y las relaciones cuyos grafos dirigidos son:



(f)



(g)

Ejercicio 2 (a) Halle el número de relaciones R en el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ que verifican simultáneamente las 3 condiciones siguientes: R es simétrica; $(a, b) \in R$; $(c, c) \in R$.
(b) Construya la matriz y el diagrama de flechas (o digrafo) de una de estas relaciones.

Ejercicio 3 En cada uno de los siguientes casos, pruebe que R es una relación de equivalencia en A y describa el conjunto cociente A/R:
(a) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si $a^2 = b^2$.
(b) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si a^2 y b^2 dan el mismo resto al dividirlos por 5.
(c) $A = \mathbb{Z}$ y aRb si a^4 y b^4 dan el mismo resto al dividirlos por 5.
(d) $A = \mathbb{R}^2$ y vRw si existe $a \in \mathbb{R}$ no nulo tal que $w = av$.

Ejercicio 4 Sea $f : A \to B$ una función. Sea $R_f \subset A \times A$ tal que $xR_fy \iff f(x) = f(y)$.
(a) Demostrar que R_f es una relación de equivalencia en A.

(b) Probar que existe una función biyectiva entre A/R_f y la imagen de f.
(c) Demostrar que para toda equivalencia S existe una función f tal que $R_f = S$.

Ejercicio 5 Sea n un entero positivo. Definamos la relación $\equiv$ en $\mathbb{Z}$, llamada congruencia módulo n, en la forma: $a \equiv b$ is $a - b$ es divisible por n (o sea que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a - b = kn$).
(a) Probar que $\equiv$ es una relación de equivalencia.
(b) Probar que $\mathbb{Z}/\equiv$ tiene n elementos.

Ejercicio 6 Probar que si R es una relación en A que es simétrica y transitiva, tal que para todo $a \in A$ existe algún elemento $b \in A$ tal que aRb, entonces R es una relación de equivalencia en A.

Relaciones de Orden

Ejercicio 7 Para cada uno de los órdenes $(A, \leq)$ siguientes, dibujar el diagrama de Hasse.
(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 12\}$ y $\leq$ es el orden de divisibilidad ($x \leq y$ si y sólo si y es múltiplo de x).
(b) A es el conjunto de todos los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ y $\leq$ es la inclusión $\subseteq$.

Ejercicio 8 Calcular la cantidad de relaciones de orden que hay sobre $\{1, 2, 3\}$.

Ejercicio 9 Hallar el número de relaciones de orden en $\{1, 2, 3, 4\}$ que contienen la relación $\{(1, 2), (3, 4)\}$.

Ejercicio 10 Demostrar que si $(A, \leq)$ es un retículo y A es finito entonces A tiene mínimo y máximo.