Matemática Discreta 1 - 2024

Práctico 4: Ecuaciones en Recurrencias

Ref. Grimaldi Secciones 10.1, 10.2, 10.3 y 10.4

Ecuaciones en Recurrencias

Ejercicio 1 Sea $a_0, a_1, \ldots a_n, \ldots$ una sucesión que verifica la ecuación:

$$a_n = 2a_{n-1} \text{ para todo } n \geq 1.$$

1. Halle a_3 si se sabe que $a_0 = 3$.
2. Halle a_0 si se sabe que $a_{10} = 1024$.
3. Halle $\lim a_n/2^n$ si se sabe que $a_0 = 3$.
4. Halle a_3 si se sabe que $\lim a_n/(2^n + 1) = 1$.
5. Halle $\lim a_n/(2^n + 3^n)$.
6. Halle a_3 si se sabe que $\lim a_n/(-2)^n$ existe (y es finito).

(*Aclaración:* en todos los límites $n \to +\infty$)

Ejercicio 2 Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones:

1. $a_{n+1} - 1.5a_n = 0, \quad n \geqslant 0.$
2. $a_n - na_{n-1} = 0, \quad n \geqslant 1.$
3. $na_n - (n-1)a_{n-1} = 0, \quad n \geqslant 2.$
4. $a_n/a_{n-1}^p = 2$, siendo $a_0 = 1$, p positivo diferente de 1.

Ejercicio 3 Resuelva las siguientes ecuaciones:

1. $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, \quad n \geqslant 2,$ con $a_0 = 1, a_1 = 3$.
2. $2a_{n+2} - 11a_{n+1} + 5a_n = 0, \quad n \geqslant 0,$ con $a_0 = 2, a_1 = -8$.
3. $3a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}, \quad n \geqslant 1,$ con $a_0 = 7, a_1 = 3$.
4. $a_{n+2} + a_n = 0, \quad n \geqslant 1,$ con $a_0 = 0, a_1 = 3$.
5. $a_{n+2} + 4a_n = 0, \quad n \geqslant 1,$ con $a_0 = a_1 = 1$.
6. $a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0, \quad n \geqslant 2,$ con $a_0 = 5, a_1 = 12$.
7. $a_n + 2a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0, \quad n \geqslant 2,$ con $a_0 = 1, a_1 = 3$.
8. $a_{n+2} + ba_{n+1} + ca_n = 0, \quad n \geqslant 0,$ con $a_0 = 0, a_1 = 1$, $a_2 = 4$ y $a_3 = 37$, y siendo b y c constantes desconocidas.
9. $a_{n+1} - a_n = 2n + 3, \quad n \geqslant 0$, con $a_0 = 1$.
10. $a_{n+1} - a_n = 3n^2 - n, \quad n \geqslant 0$, con $a_0 = 3$.
11. $a_{n+1} - 2a_n = 5, \quad n \geqslant 0$, con $a_0 = 1$.
12. $a_{n+1} - 2a_n = 2^n, \quad n \geqslant 0$, con $a_0 = 1$.
13. $a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 3^n, \quad n \geqslant 2,$ con $a_0 = 0, a_1 = 1$.
14. $a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n = 3 + 5n, \quad n \geqslant 0.$
15. $a_n = 2a_{n-1} + n2^n, \quad n \geqslant 1$, con $a_0 = 1$.
16. $a_{n+2} - a_n = 5 + \cos(n\frac{\pi}{2}), \quad n \geqslant 0$, con $a_0 = -1, a_1 = 3$.
17. $a_{n+2} - 9a_n = 2 \times 3^n + 5 \times 2^n, \quad n \geqslant 0$, con $a_0 = -1, a_1 = \frac{13}{2}$.

Ejercicio 4
Se considera la siguiente ecuación:

$$a_n + \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} = 2^n \qquad \text{para todo } n \geqslant 2.$$

Halle α, β y a_{100} sabiendo que: $a_0 = 1, a_1 = 5, a_2 = 1$ y $a_3 = 17$.

Ejercicio 5 Exprese a_n en función de los términos anteriores (a_k con $k \leqslant n-1$) siendo a_n:

1. La cantidad de saludos que se dieron los primeros n invitados de una reunión, si cada vez que llego uno, éste saludo el resto.
2. El número de secuencias de 0s y 1s de largo n en las cuales no aparecen dos ceros seguidos.
3. La cantidad de enteros positivos de hasta n dígitos con $\{0,1,2\}$, tales que la suma de sus dígitos es impar.

Ejercicio 6 Resuelva la siguientes relaciones de recurrencia por el método de las funciones generatrices:

1. $a_{n+1} - a_n = 3^n, \quad n \geq 0,\ a_0 = 1$
2. $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0,\ n \geq 0,\ a_0 = 1,\ a_1 = 6$

Ejercicio 7 Resuelva el siguiente sistema de relaciones de recurrencia:

$$\begin{cases} a_{n+1} = -2a_n - 4b_n, \\ b_{n+1} = 4a_n + 6b_n \\ n \geq 0,\ a_0 = 1,\ b_0 = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 8
Para un campeonato de fútbol se tiene una cantidad par de equipos participantes. Se quiere armar la primera fecha (en una fecha todos los equipos juegan exactamente una vez). Sea a_k la cantidad de formas de armar la primera fecha de un campeonato con $2k$ equipos.

1. Calcular a_1, a_2, a_3.
2. Deducir que $a_{k+1} = (2k+1) \times a_k$.
3. Probar que $a_k = (2k-1) \times (2k-3) \times \cdots \times 3 \times 1$, para todo $k \geq 1$.

Ejercicio 9 Resuelva la siguiente relación de recurrencia por el método de las funciones generatrices: $a_{n+1} - (n+1)a_n = 2^{n+1}, \quad n \geq 0,\ a_0 = 1$.
Comentario: Obtendrá una ecuación diferencial. Para evitarla puede hacer el cambio $a_n = n! b_n$.

Ejercicios Complementarios

Ejercicio 10
Sea a_n la sucesión que verifica la ecuación

$$a_n - 2a_{n-1} = 3 \times 2^n, \qquad a_0 = 1.$$

Indique la opción correcta:

1. $a_{50} = 2^{50}$.
2. $a_{50} = 50 \times 2^{50}$.
3. $a_{50} = 150 \times 2^{50}$.
4. $a_{50} = 151 \times 2^{50}$.

Ejercicio 11 Exprese a_n en función de los términos anteriores (a_k con $k \leqslant n-1$) siendo a_n:

1. La cantidad de formas de subir una escalera de n escalones si se puede a veces saltar un escalón.
2. Lo anterior pero sin que se puedan saltar dos veces seguidas un escalón (o sea, que si se saltea un escalón, entonces el siguiente no se saltea).
3. El número de formas en que una sucesión de unos y doses suman n. Por ejemplo, para $n = 3$ serían las sucesiones 111, 12 y 21.
4. La cantidad de palabras binarias de largo n, que no tienen 3 unos consecutivos.
5. El número de secuencias de As, Bs y Cs de largo n en las cuales no aparecen dos As seguidas.

Ejercicio 12 Se pretende diseñar una bandera con n franjas horizontales, cada una de las cuales puede ser de color rojo, azul, verde o amarillo. Halle la cantidad de banderas posibles en cada una de las siguientes situaciones:

1. No hay restricciones sobre el color de cada franja.
2. Dos franjas adyacentes nunca pueden ser del mismo color.
3. Dos franjas adyacentes nunca pueden ser del mismo color, como tampoco pueden serlo la primera y la última franjas.

Ejercicio 13 Hay n estudiantes formando una fila y cuando suena el silbato cada estudiante puede intercambiar de lugar con su compañero de adelante o de atrás (en caso de que los haya). ¿De cuántas formas diferentes pueden quedar esos n estudiantes luego de haber sonado el silvato?

Ejercicio 14
Sea a_n una sucesión tal que

$$a_{n+4} - 5a_{n+2} + 6a_n = 0, \qquad a_0 = 3, a_1 = 5, a_2 = 7, a_3 = 9.$$

Indique la opción correcta:

1. $a_{1000} = 2^{1001} + 3^{1000}$.
2. $a_{1000} = 2003$.
3. $a_{1000} = (\sqrt{2})^{1000} + 3(-\sqrt{2})^{1000} - 5(\sqrt{3})^{1000} + (-\sqrt{3})^{1000}$.

4. $a_{1000} = 2^{501} + 3^{500}$.

5. $a_{1000} = 2^{1000} + 2 \cdot 3^{1000}$.

Ejercicio 15 Para todo $n \in \mathbb{N}$ se considera el número:

$$a_n = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

1. Mostrar que a_n verifica una relación de recurrencia de orden 2, homogénea, a coeficientes constantes.

2. Probar que a_n es un entero positivo, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 16
Resuelva el siguiente sistema de relaciones de recurrencia:

$$\begin{cases} a_n = -a_{n-1} - b_n \\ b_{n+1} = b_n - 3a_{n-1} \\ n \geq 0,\ a_0 = 0,\ b_0 = 2, b_1 = 1. \end{cases}$$