

Dualidad – Ejemplo forestal

Una empresa forestal desea maximizar sus ingresos por la venta de tres tipos de madera: pino, roble y cedro. La disponibilidad de cada tipo de madera está limitada por la capacidad de cosecha y la disponibilidad de recursos forestales. Los datos son los siguientes:

- Precio de venta: Pino = \$200/m³, Roble = \$300/m³, Cedro = \$400/m³
- Capacidad máxima de cosecha: 5000 m³ por mes
- Disponibilidad de madera: Pino 3000 m³, Roble 2000 m³, Cedro 1500 m³

Formulación del problema primal (Maximización de Ingresos):

max $200x + 300y + 400z$ (Ingresos por la venta de madera)

Sujeto a:

$$x + y + z \leq 5000 \text{ (Capacidad máxima de cosecha)}$$

$$x \leq 3000 \text{ (Disponibilidad de pino)}$$

$$y \leq 2000 \text{ (Disponibilidad de roble)}$$

$$z \leq 1500 \text{ (Disponibilidad de cedro)}$$

$$x, y, z \geq 0$$

Problema Dual (Minimización de Costos):

El problema dual correspondiente busca minimizar los costos asociados a la tala de árboles, considerando los costos de mano de obra, equipos y transporte. Las variables duales representan los costos sombra de cada restricción.

Formulación del problema dual:

$$\min 5000w + 3000x + 2000y + 1500z$$

Sujeto a:

$$w + x \geq 200 \text{ (Costo sombra asociado al pino)}$$

$$w + y \geq 300 \text{ (Costo sombra asociado al roble)}$$

$$w + z \geq 400 \text{ (Costo sombra asociado al cedro)}$$

$$w, x, y, z \geq 0$$

En este problema, las variables duales w , x , y , z representan los precios sombra o costos sombra asociados a cada restricción. Específicamente:

- w es el precio sombra de la restricción de capacidad máxima de cosecha
- x es el precio sombra de la restricción de disponibilidad de pino
- y es el precio sombra de la restricción de disponibilidad de roble
- z es el precio sombra de la restricción de disponibilidad de cedro

En este ejemplo, la solución óptima del problema primal representa la cantidad de cada tipo de madera que debe cosecharse para maximizar los ingresos, mientras que la solución óptima del

problema dual proporciona los costos sombra asociados a cada restricción, lo que indica el costo de oportunidad de incrementar la disponibilidad de cada tipo de madera en una unidad.

Al resolver ambos problemas, se puede demostrar que las soluciones óptimas están relacionadas por las condiciones de dualidad, y que los valores de las variables duales brindan información valiosa sobre la sensibilidad de la solución óptima ante cambios en los coeficientes o restricciones del problema primal.

El precio sombra indica el valor (en términos de la función objetivo) que se obtendría al relajar o aumentar la restricción correspondiente en una pequeña cantidad. En otras palabras, representa el costo de oportunidad de mantener esa restricción activa. Por ejemplo, si el valor óptimo de x es 50, significa que si se aumenta la disponibilidad de pino en 1 unidad, los costos totales disminuirían en \$50. Esto implica que el costo de oportunidad de mantener la restricción de disponibilidad de pino es de \$50 por unidad.