NUMEROS COMPLEJOS. POLINOMIOS

§ 1. NUMEROS COMPLEJOS. GENERALIDADES

Se llama *número complejo* a toda expresión de la forma

$$a + bi, \tag{1}$$

donde, a y b son números reales; i es la *unidad llamada imaginaria*, definida por las ecuaciones:

$$i = \sqrt{-1} \quad \text{ó} \quad i^2 = -1; \tag{2}$$

a es la parte *real* y bi, parte *imaginaria* del número complejo. Dos números complejos $a + bi$ y $a - bi$ que se diferencian sólo por el signo de su parte imaginaria se llaman *conjugados*.

Si $a = 0$, el número $0 + bi = bi$, es un número *puramente imaginario*; si $b = 0$, se obtiene un número real $a + 0 \cdot i = a$.

Aceptemos dos concepciones fundamentales:

1) dos números complejos, $a_1 + b_1 i$ y $a_2 + b_2 i$ se consideran iguales, si:

$$a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2$$

es decir, si son iguales sus partes reales e imaginarias por separado;

2) un número complejo es igual a cero:

$$a + bi = 0,$$

siempre que $a = 0$, $b = 0$.

1. Representación geométrica de los números complejos. Todo número complejo $a + bi$ puede ser representado sobre el plano Oxy mediante un punto $A(a, b)$, de coordenadas a y b (fig. 161). Recíprocamente, todo punto $M(a, b)$ del plano Oxy puede considerarse como la imagen geométrica del número complejo $a + bi$.

Pero, si a todo punto $A(a, b)$ corresponde algún número complejo $a + bi$, se puede decir, en particular, que a todo punto del eje Ox le corresponde un número real ($b = 0$). Todo punto del eje Oy

representa un número puramente imaginario, puesto que en este caso $a = 0$. Por eso, representando los números complejos sobre un plano, el eje Oy se llama *eje imaginario* y el Ox, *eje real.*

Uniendo el punto $A(a, b)$ con el origen de coordenadas, obtenemos el vector $\overline{OA}$. En algunos casos es muy conveniente considerar el *vector* $\overline{OA}$ como la representación geométrica del número complejo $a + bi$.

2. Forma trigonométrica de los números complejos. Designemos por φ y r ($r \geqslant 0$) las coordenadas polares del punto $A(a, b)$,

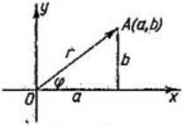

Fig. 161

tomando por polo el origen de coordenadas y por eje polar, la dirección positiva del eje Ox. En este caso (fig. 161), tenemos las expresiones siguientes:

$$a = r \cos \varphi, \qquad b = r \operatorname{sen} \varphi$$

y, por tanto, el número complejo puede ser representado en la forma:

$$a + bi = r(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi). \tag{3}$$

La expresión representada por el segundo miembro se llama forma trigonométrica del número complejo $a + bi$. Las magnitudes r y φ se expresan en función de a y b mediante las fórmulas:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \varphi = \operatorname{Arctg} \frac{b}{a}.$$

El número r se llama *módulo* y φ, *argumento* del número complejo $a + bi$.

El argumento de un número complejo, es decir, el ángulo φ, es positivo, cuando se toma a partir de la dirección positiva del eje Ox en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, y es negativo, cuando se calcula en dirección opuesta. Es evidente que el argumento φ no se determina de una manera unívoca, sino con precisión igual al valor del sumando $2\pi k$; donde k es cualquier número entero.

El módulo r del número complejo $a + bi$ se designa a veces por el símbolo $|a + bi|$:

$$r = |a + bi|.$$

Notemos que todo número real A también puede escribirse en la forma (3), o bien:

$$A = |A| (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) \text{ cuando } A > 0$$
$$A = |A| (\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi) \text{ cuando } A < 0.$$

El módulo del número complejo 0 es igual a cero: $|0| = 0$. Como argumento de cero se puede tomar caulquier ángulo φ. En efecto, para todo ángulo φ tiene lugar la igualdad:

$$0 = 0 \cdot (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi).$$

§ 2. OPERACIONES FUNDAMENTALES CON NUMEROS COMPLEJOS

1. Adición. La suma de dos números complejos, $a_1 + b_1 i$ y $a_2 + b_2 i$, es un número complejo definido por la ecuación:

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i. \qquad (1)$$

De la fórmula (1) se deduce que la adición de los números complejos, representados en forma de vectores, se efectúa según la regla de adición de vectores.

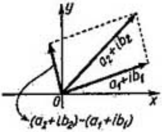

Fig. 162

2. Sustracción. La diferencia de dos números complejos, $a_2 + b_2 i$ y $a_1 + b_1 i$, es un número complejo que, adicionado a $a_1 + b_1 i$, da $a_2 + b_2 i$.

Es fácil ver que:

$$(a_2 + b_2 i) - (a_1 + b_1 i) = (a_2 - a_1) + (b_2 - b_1) i. \qquad (2)$$

Observemos que el módulo de la diferencia de dos números complejos $\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}$ es igual a la distancia entre los puntos que representan estos números en el plano de la variable compleja (fig. 162).

3. Multiplicación. El producto de los números complejos, $a_1 + b_1 i$ y $a_2 + b_2 i$, multiplicados estos números como binomios, según las reglas algebraicas, es un número complejo. Hay que tener en cuenta que:

$$i^2 = -1;\ i^3 = (-1)\,i = -i;\ i^4 = (-i)\,(i) = -i^2 = 1;$$
$$i^5 = 1\cdot i,\ \text{etc.}$$

y, en general, para k entero:

$$i^{4k} = 1;\quad i^{4k+1} = i;\quad i^{4k+2} = -1;\quad i^{4k+3} = -i.$$

En virtud de esta regla tenemos:

$$(a_1 + b_1 i)\,(a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + b_1 a_2 i + a_1 b_2 i + b_1 b_2 i^2,$$

ó

$$(a_1 + b_1 i)\,(a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (b_1 a_2 + a_1 b_2)\,i. \tag{3}$$

Si los números complejos están expresados en forma trigonométrica, tenemos:

$$\begin{aligned} r_1 (\cos\varphi_1 + i\operatorname{sen}\varphi_1)\, r_2 (\cos\varphi_2 + i\operatorname{sen}\varphi_2) &= \\ = r_1 r_2 [\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + i\operatorname{sen}\varphi_1 \cos\varphi_2 &+ \\ + i\cos\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2 + i^2 \operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2] &= \\ = r_1 r_2 [\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2) &+ \\ + i(\operatorname{sen}\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2)] &= \\ = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)]&. \end{aligned}$$

Así pues:

$$\begin{aligned} r_1 (\cos\varphi_1 + i\operatorname{sen}\varphi_1)\, r_2 (\cos\varphi_2 + i\operatorname{sen}\varphi_2) &= \\ = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)]&, \end{aligned} \tag{3'}$$

es decir, el *producto de dos números complejos es un número complejo cuyo módulo es igual al producto de los módulos de los factores y el argumento es igual a la suma de argumentos de los factores.*

Observación 1. En virtud de la fórmula (3), los números complejos conjugados, $a + bi$ y $a - bi$, satisfacen a la igualdad:

$$(a + ib)\,(a - ib) = a^2 + b^2,$$

es decir, el producto de dos números complejos conjugados es igual a la suma de los cuadrados de sus módulos.

4. División. La división de dos números complejos es la operación inversa a su multiplicación. Si

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = x + yi$$

(donde $\sqrt{a_2^2 + b_2^2} \neq 0$), entonces x e y deben ser tales que se cumpla la igualdad:

$$a_1 + b_1 i = (a_2 + b_2 i)\,(x + yi),$$

o sea:

$$a_1 + b_1 i = (a_2 x - b_2 y) + (a_2 y + b_2 x)\, i.$$

Por consiguiente,

$$a_1 = a_2 x - b_2 y, \qquad b_1 = b_2 x + a_2 y,$$

de donde:

$$x = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}, \qquad y = \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2},$$

y finalmente:

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\, i.$$

En la práctica, la división de los números complejos se efectúa de la manera siguiente: para dividir $a_1 + ib_1$ por $a_2 + ib_2$, multiplicamos, tanto el dividendo como el divisor, por un número complejo conjugado de este último (es decir, por $a_2 - ib_2$). Entonces, el divisor será un número real; al dividir por éste la parte real y la imaginaria del dividendo, obtenemos:

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} =$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2)\, i}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\, i.$$

Si el número complejo está expresado en forma trigonométrica, tendremos:

$$\frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \operatorname{sen} (\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Para verificar esta igualdad, basta multiplicar el divisor por el cociente:

$$r_2 (\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2) \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \operatorname{sen} (\varphi_1 - \varphi_2)] =$$

$$= r_2 \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_2 + \varphi_1 - \varphi_2) + i \operatorname{sen} (\varphi_2 + \varphi_1 - \varphi_2)] =$$

$$= r_1 (\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1).$$

De tal modo, *el módulo del cociente de dos números complejos es igual al cociente de los módulos del dividendo y del divisor; el argumento del cociente es igual a la diferencia entre los argumentos del dividendo y del divisor.*

Observación 2. De las reglas de operaciones con números complejos se deduce que la adición, sustracción, multiplicación y división de los números complejos dan de nuevo un número complejo. Si las reglas de operaciones con números complejos son aplicadas a los números reales (considerándolos como caso particular de los números complejos), entonces estas reglas coinciden con las reglas ordinarias de la aritmética.

Observación 3. Volviendo a la deficición de suma, diferencia, producto y cociente de los números complejos, es fácil comprobar que, si en estas expresiones son sustituidos los números complejos por sus números conjugados correspondientes, los resultados de las operaciones indicadas también son sustituidos por los números conjugados. De aquí, en particular, se deduce el teorema siguiente:

Teorema. *Si en un polinomio con coeficientes reales*

$$A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_n$$

sustituimos x por el número $a + bi$, y, después, por el número conjugado $a - bi$, los resultados obtenidos serán mutuamente conjugados.

§ 3. ELEVACION A POTENCIA Y EXTRACCION DE LA RAIZ DEL NUMERO COMPLEJO

1. Elevación a potencia. De la fórmula (3′) del párrafo precedente se deduce que si n es un número entero positivo, entonces:

$$[r(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi). \tag{1}$$

Esta expresión es la *fórmula de Moivre* y muestra que, *al elevar un número complejo a una potencia entera y positiva, el módulo de este número se eleva a la misma potencia y el argumento se multiplica por el exponente de esta potencia.*

Consideremos ahora una aplicación más de la fórmula de Moivre. Haciendo $r = 1$, obtenemos:

$$(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^n = \cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi.$$

Desarrollando el primer miembro según la fórmula del binomio de Newton e igualando las partes reales e imaginarias, podremos expresar $\operatorname{sen} n\varphi$ y $\cos n\varphi$ en función de potencias de $\operatorname{sen}\varphi$ y $\cos\varphi$.

Así, por ejemplo, si $n = 3$, obtenemos:

$\cos^3\varphi + i3\cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi - 3\cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi - i\operatorname{sen}^3\varphi = \cos 3\varphi + i\operatorname{sen} 3\varphi$.

Usando la igualdad de estos números complejos, tenemos:

$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi$, $\operatorname{sen} 3\varphi = -\operatorname{sen}^3\varphi + 3\cos^2\varphi \operatorname{sen}\varphi$.

2. Extracción de la raíz. La raíz n—ésima de un número complejo es otro número complejo que, al ser elevado a la potencia n, dará el número comprendido bajo el radical, es decir, si:

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)} = \rho(\cos\psi + i\operatorname{sen}\psi),$$

$$\rho^n(\cos n\psi + i\operatorname{sen} n\psi) = r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi).$$

Como los módulos de los números complejos iguales han de ser iguales y los argumentos pueden diferenciarse en un múltiplo de 2π, tenemos:

$$\rho^n = r, \quad n\psi = \varphi + 2k\pi.$$

De aquí:

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

donde, k es un número entero arbitrario, $\sqrt[n]{r}$ es el valor aritmético (real y positivo) de la raíz del número positivo r. Por consiguiente,

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\operatorname{sen}\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right). \qquad (2)$$

Dando a k los valores $0, 1, 2 \ldots, n - 1$, obtenemos n diferentes valores de la raíz. Para otros valores de k los argumentos se diferenciarán de los obtenidos antes en un múltiplo de 2π y, por tanto, se obtendrán los valores de la raíz que coinciden con los estudiados.

Así pues, la raíz n—ésima de un número complejo tiene n diferentes valores.

La raíz n—ésima del número real A, distinto de cero, también tiene n valores, puesto que el número real es un caso particular del número complejo y puede ser representado en forma trigonométrica:

si $A > 0$, tenemos: $A = |A| (\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$;

si $A < 0$, tenemos: $A = |A| (\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi)$.

Ejemplo 1. Hallar todos los valores de la raíz cúbica de la unidad.

Solución. Representemos la unidad en forma trigonométrica:

$$1 = \cos 0 + i\operatorname{sen} 0.$$

Según la fórmula (2):

$$\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{\cos 0+i\operatorname{sen} 0}=\cos\frac{0+2k\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{0+2k\pi}{3}.$$

Haciendo k igual a 0, 1, 2, obtenemos tres valores de la raíz:

$$x_1=\cos 0+i\operatorname{sen} 0=1;\quad x_2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3};\quad x_3=\cos\frac{4\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}.$$

Tomando en cuenta que

$$\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2};\ \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2};\ \cos\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2};\ \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

resulta:

$$x_1=1;\quad x_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};\quad x_3=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

En la figura 163 los puntos A, B, C son las imágenes geométricas de las raíces obtenidas.

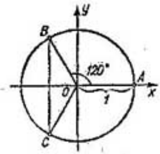

Fig. 163

3. Solución de la ecuación binomia. La ecuación

$$x^n=A$$

se llama *binomia*. Hallemos las raíces de esta ecuación.

Si A es un número real positivo, tenemos:

$$x=\sqrt[n]{A}\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

La expresión encerrada en el paréntesis da todos los valores de la raíz de n—ésima potencia de la 1.

Si A es un número real negativo, entonces:

$$x=\sqrt[n]{|A|}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{n}+i\operatorname{sen}\frac{\pi+2k\pi}{n}\right).$$

La expresión entre paréntesis da todos los valores de la raíz de n—ésima potencia de -1.

Si A es un número complejo, los valores de x se hallan según la fórmula (2).

Ejemplo 2. Resolver la ecuación

$$x^4=1.$$

Solución.

$$x=\sqrt[4]{\cos 2k\pi+i\operatorname{sen} 2k\pi}=\cos\frac{2k\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{2k\pi}{4}.$$

Haciendo k igual a 0, 1, 2, 3, obtenemos:

$$x_1=\cos 0+i\operatorname{sen} 0=1,$$

$$x_2=\cos\frac{2\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{4}=i,$$

$$x_3=\cos\frac{4\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{4}=-1,$$

$$x_4=\cos\frac{6\pi}{4}+i\operatorname{sen}\frac{6\pi}{4}=-i.$$

§ 4. FUNCION EXPONENCIAL CON EXPONENTE COMPLEJO Y SUS PROPIEDADES

Sea $z=x+iy$. Si x e y son variables reales, z es una variable compleja. A cada valor de la variable compleja le corresponde un punto bien determinado (fig. 161) en el plano Oxy (plano de la variable compleja.)

Definición. Si a cada valor de una variable compleja z, perteneciente a cierto dominio del plano de variables complejas, corresponde un valor bien determinado de otra variable compleja w, se dice que w es una *función de la variable compleja* z: $w=f(z)$ ó $w=w(z)$.

Existen las nociones del límite, de la derivada, de la integral, etc., de una función de variable compleja.

Estudiemos una función de la variable compleja, o bien, la función exponencial:

$$w=e^z$$

o sea:

$$w=e^{x+iy}.$$

Los valores complejos de la función w se determinan del modo siguiente*:

$$e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\operatorname{sen} y), \qquad (1)$$

*) Demostraremos más adelante (§ 21, cap. XIII y § 18 cap. XVI, tomo II) la conveniencia de esta definición de la función exponencial.

es decir,

$$w(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y). \tag{2}$$

Ejemplos:

1. $z = 1 + \frac{\pi}{4} i$, $e^{1+\frac{\pi}{4}i} = e\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = e\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. $z = 0 + \frac{\pi}{2} i$, $e^{0+\frac{\pi}{2}i} = e^0\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) = i$,

3. $z = 1 + i$, $e^{1+i} = e^1(\cos 1 + i \operatorname{sen} 1) = 0{,}54 + i\cdot 0{,}83$,

4. $z = x$ (x es un número real), $e^{x+0i} = e^x(\cos 0 + i\operatorname{sen} 0) = e^x$ que es una función exponencial ordinaria.

Propiedades de la función exponencial

1. Si z_1 y z_2 son dos números complejos, entonces:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}. \tag{3}$$

Demostración. Sea

$$z_1 = x_1 + iy_1, \; z_2 = x_2 + iy_2;$$

entonces

$$e^{z_1+z_2} = e^{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} =$$

$$= e^{x_1}e^{x_2}[\cos(y_1+y_2) + i\operatorname{sen}(y_1+y_2)]. \tag{4}$$

Por otra parte, en virtud del teorema sobre el producto de dos números complejos expresados en forma trigonométrica, tenemos:

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1+iy_1}e^{x_2+iy_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i\operatorname{sen} y_1)\,e^{x_2}(\cos y_2 + i\operatorname{sen} y_2) =$$

$$= e^{x_1}e^{x_2}[\cos(y_1+y_2) + i\operatorname{sen}(y_1+y_2)]. \tag{5}$$

Los segundos miembros de las igualdades (4) y (5) son iguales y, por consiguiente, serán iguales también los primeros

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}.$$

2. De modo análogo se demuestra la fórmula:

$$e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}. \tag{6}$$

3. Si m es un número entero, tenemos:

$$(e^z)^m = e^{mz}. \tag{7}$$

Esta fórmula se obtiene fácilmente de (3), cuando $m > 0$.

La misma se obtiene a partir de las fórmulas (3) y (6) si $m < 0$.

4. Demostremos la identidad:

$$e^{z+2\pi i} = e^z. \qquad (8)$$

En efecto, según las fórmulas (3) y (1) tenemos:

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z (\cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi) = e^z.$$

De la identidad (8) se deduce que la función exponencial e es una función periódica con período $2\pi i$.

5. Estudiemos ahora la magnitud compleja

$$w = u(x) + iv(x),$$

donde $u(x)$ y $v(x)$ son funciones reales de la variable real x. Es una *función compleja de la variable real.*

a) Supongamos que existen los límites:

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = u(x_0); \qquad \lim_{x \to x_0} v(x) = v(x_0).$$

Entonces, $u(x_0) + iv(x_0) = w_0$ es el límite de la variable compleja w.

b) Si existen las derivadas $u'(x)$ y $v'(x)$, la expresión

$$w'_x = u'(x) + iv'(x) \qquad (9)$$

es la *derivada* de una función compleja de variable real con respecto al argumento real.

Estudiemos ahora la siguiente función exponencial:

$$w = e^{\alpha x + i\beta x} = e^{(\alpha + i\beta) x},$$

donde α y β son números constantes reales, y x es una variable real. Es una función compleja de variable real que, conforme a la fórmula (1), puede escribirse así:

$$w = e^{\alpha x}[\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x]$$

ó

$$w = e^{\alpha x} \cos \beta x + ie^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x.$$

Hallemos la derivada w'_x. Según la fórmula (9) tenemos:

$$\begin{aligned} w'_x &= (e^{\alpha x} \cos \beta x)' + i(e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x)' = \\ &= e^{\alpha x}(\alpha \cos \beta x - \beta \operatorname{sen} \beta x) + ie^{\alpha x}(\alpha \operatorname{sen} \beta x + \beta \cos \beta x) = \\ &= \alpha [e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x)] + i\beta [e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x)] = \\ &= (\alpha + i\beta)[e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \operatorname{sen} \beta x)] = (\alpha + i\beta)\, e^{(\alpha + i\beta) x}. \end{aligned}$$

Así pues, si $w = e^{(\alpha+i\beta)x}$, entonces: $w' = (\alpha + i\beta)e^{(\alpha+i\beta)x}$

ó

$$[e^{(\alpha + i\beta) x}]' = (\alpha + i\beta)\, e^{(\alpha + i\beta) x}. \qquad (10)$$

De tal modo, si k es un número complejo (y, en particular, real) y x es un número real:

$$(e^{kx})' = ke^{kx}. \tag{9'}$$

Hemos obtenido la fórmula general para la derivación de una función exponencial. También tenemos:

$$(e^{kx})'' = [(e^{kx})']' = k(e^{kx})' = k^2e^{kx}$$

y para n arbitrario:

$$(e^{kx})^{(n)} = k^n e^{kx}.$$

Utilizaremos estas fórmulas más adelante.

§ 5. FORMULA DE EULER. FORMA EXPONENCIAL DEL NUMERO COMPLEJO

Si hacemos $x = 0$ en la fórmula (1) del párrafo anterior, obtenemos:

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y. \tag{1}$$

Esta es la *fórmula de Euler* y expresa la relación entre la función exponencial con exponente imaginario y las funciones trigonométricas.

Sustituyendo y por $-y$ en la fórmula (1), obtenemos:

$$e^{-iy} = \cos y - i \operatorname{sen} y. \tag{2}$$

De las igualdades (1) y (2) hallemos $\cos y$ y $\operatorname{sen} y$:

$$\left.\begin{aligned} \cos y &= \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \\ \operatorname{sen} y &= \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Las fórmulas (3) se usan, en particular, para expresar las potencias de $\cos \varphi$ y de $\operatorname{sen} \varphi$, así como también de sus productos, en función del seno y del coseno de arcos múltiples.

Ejemplos:

1. $$\cos^2 y = \left(\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(e^{i2y} + 2 + e^{-i2y}) =$$

$$= \frac{1}{4}[(\cos 2y + i \operatorname{sen} 2y) + 2 + (\cos 2y - i \operatorname{sen} 2y)] =$$

$$= \frac{1}{4}(2\cos 2y + 2) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2y).$$

$$2.\ \cos^2\varphi\,\mathrm{sen}^2\varphi=\left(\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}\right)^2=$$

$$=\frac{(e^{i2\varphi}-e^{-i2\varphi})^2}{4\cdot 4i^2}=-\frac{1}{8}\cos 4\varphi+\frac{1}{8}.$$

Forma exponencial del número complejo. Escribamos un número complejo z en forma trigonométrica:

$$z=r(\cos\varphi+i\,\mathrm{sen}\,\varphi),$$

donde, r es el módulo y φ, el argumento de este número complejo. Según la fórmula de Euler:

$$\cos\varphi+i\,\mathrm{sen}\,\varphi=e^{i\varphi}.$$

Por consiguiente, todo número complejo puede ser representado en la forma exponencial:

$$z=re^{i\varphi}.$$

Ejemplos. Escribir los números 1, i, -2, $-i$ en la forma exponencial.
Solución.

$$1=\cos 2k\pi+i\,\mathrm{sen}\,2k\pi=e^{2k\pi i},$$

$$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}=e^{\frac{\pi}{2}i},$$

$$-2=2(\cos\pi+i\,\mathrm{sen}\,\pi)=2e^{\pi i},$$

$$-i=\cos\frac{\pi}{2}-i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{2}=e^{-\frac{\pi}{2}i}.$$

§ 6. DESARROLLO DEL POLINOMIO EN FACTORES

Sabemos que la función

$$f(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n,$$

en la que n es un número entero se llama *polinomio* o *función racional entera de x*. El número n es el *grado del polinomio*. Los coeficientes $A_0, A_1 \ldots A_n$ son aquí números reales o complejos. La variable independiente x puede tomar tanto valores reales como complejos. El valor de la variable x para el cual el polinomio se reduce a cero es la *raíz* del polinomio.

Teorema 1. (Teorema de Bezout). *El resto de la división del polinomio $f(x)$ por la diferencia $(x-a)$ es igual a $f(a)$.*

Demostración. El cociente de la división del polinomio $f(x)$ por $(x-a)$ es un polinomio $f_1(x)$, de grado inferior en una unidad que él del polinomio $f(x)$, el resto es un número constante R. Entonces podemos escribir:

$$f(x) = (x - a)\ f_1(x) + R. \qquad (1)$$

Esta igualdad es válida para todos los valores de x distintos de a (la división por $x - a$ cuando $x = a$ no tiene sentido).

Si x tiende a a, el límite del primer miembro de la igualdad (1) es $f(a)$ y el límite del segundo miembro, es R. Como las funciones $f(x)$ y $(x - a)\ f_1(x) + R$ son iguales para todos los valores de $x \neq a$, sus límites serán también iguales, cuando $x \to a$, es decir, $f(a) = R$.

Colorario. *Si a es una raíz del polinomio, es decir,* $f(a) = 0$, *entonces $f(x)$ se divide por $x - a$ sin resto alguno* y, por tanto, se representa como un producto:

$$f(x) = (x - a)\ f_1(x),$$

donde $f_1(x)$ es un polinomio.

Ejemplo 1. El polinomio $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ se anula cuando $x = 1$, es decir, $f(1) = 0$. Por eso el polinomio dado se divide sin resto por $x - 1$:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x^2 - 5x + 6).$$

Estudiemos ahora las ecuaciones con una incógnita x.

Todo número (real o complejo) que sustituya a x en la ecuación y la convierta en identidad, se llama *raíz* de la ecuación.

Ejemplo 2. Los números $x_1 = \frac{\pi}{4}$; $x_2 = \frac{5\pi}{4}$; $x_3 = \frac{9\pi}{4}$; ..., son raíces de la ecuación $\cos x = \operatorname{sen} x$.

Si una ecuación tiene la forma $P(x) = 0$, donde $P(x)$ es polinomio de grado n, se llama ecuación *algebraica* de n—ésimo grado. De la definición se deduce que las raíces de la ecuación algebraica $P(x) = 0$ son idénticas a las del polinomio $P(x)$.

Naturalmente, surge la pregunta, si toda ecuación tiene raíces. Para las ecuaciones no algebraicas la respuesta es negativa: existen ecuaciones no algebraicas que no tienen raíces (reales, ni complejas), como, por ejemplo, la ecuación $e^x = 0$*).

Sin embargo, para las ecuaciones algebraicas la respuesta es positiva, lo que constituye el contenido del siguiente teorema fundamental del álgebra.

---

*) En efecto, si el número $x_1 = a + bi$ fuera la raíz de esta ecuación, existiría la identidad $e^{a+bi} = 0$, o (en virtud de la fórmula de Euler) $e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b) = 0$. Pero, e^a no puede anularse cualquiera que sea el número real a; tampoco $\cos b = i \operatorname{sen} b$ es igual a cero (puesto que el módulo de este número es igual a $\sqrt{\cos^2 b + \operatorname{sen}^2 b} = 1$ para cualquier b). Por tanto, el producto $e^a(\cos b + i \operatorname{sen} b) \neq 0$, es decir, $e^{a+bi} \neq 0$, lo que significa que la ecuación $e^x = 0$ no tiene raíces.

Teorema 2. (***Teorema fundamental del álgebra***). *Toda función racional entera $f(x)$ tiene por lo menos una raíz real o compleja.*

Este teorema se demuestra en el curso de álgebra superior. Aquí lo admitiremos sin demostración.

Utilizando el teorema fundamental del álgebra es fácil demostrar el siguiente teorema.

Teorema 3. *Todo polinomio de n—ésimo grado puede ser desarrollado en n factores lineales de la forma $x-a$ y un factor igual al coeficiente de x^n.*

Demostración. Sea $f(x)$ un polinomio de grado n:

$$f(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n.$$

En virtud del teorema fundamental este polinomio tiene por lo menos una raíz; designémosla por a_1. Ahora bien, según el corolario del teorema de Bezout podemos escribir:

$$f(x)=(x-a_1)\,f_1(x),$$

donde, $f_1(x)$ es el polinomio de grado $(n-1)$; $f_1(x)$ también tiene una raíz que designemos por a_2. Entonces,

$$f_1(x)=(x-a_2)\,f_2(x),$$

donde, $f_2(x)$ es el polinomio de grado $(n-2)$. De igual manera:

$$f_2(x)=(x-a_3)\,f_3(x).$$

Continuando este proceso, llegamos a la expresión:

$$f_{n-1}(x)=(x-a_n)\,f_n,$$

donde f_n es un polinomio de grado cero, es decir, f_n es un número fijo. Evidentemente, este número es igual al coeficiente de x^n, es decir, $f_n=A_0$.

En virtud de las igualdades obtenidas podemos escribir:

$$f(x)=A_0\,(x-a_1)\,(x-a_2)\ldots(x-a_n). \qquad (2)$$

Del desarrollo (2) se deduce que los números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son las raíces del polinomio $f(x)$, puesto que, realizada la sustitución $x=a_1$, $x=a_2$, $\ldots$, $x=a_n$, el segundo miembro y, por consiguiente, el primero se reducen a cero.

Ejemplo 3. El polinomio $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$ se reduce a cero, cuando

$$x=1,\ x=2,\ x=3.$$

Por consiguiente,

$$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)\,(x-2)\,(x-3).$$

Ningún valor $x=a$ distinto de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ puede ser raíz del polinomio $f(x)$, puesto que ningún factor del segundo miembro de la igualdad (2) se anula cuando $x = a$. Ahora podemos expresar el siguiente enunciado:

Todo polinomio de grado n no puede tener más que n raíces diferentes.

Pero, en este caso, obtenemos el teorema siguiente.

Teorema 4. *Si los valores de dos polinomios* $\varphi_1(x)$ *y* $\varphi_2(x)$ *de grado* n *coinciden para* $n+1$ *valores diferentes* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ *del argumento* x, *los polinomios enunciados son idénticos.*

Demostración. Designemos por $f(x)$ la diferencia de estos polinomios:

$$f(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x).$$

Según la hipótesis, $f(x)$ es un polinomio de grado no superior a n, que se reduce a cero en los puntos $a_1, \ldots, a_n$. Por tanto, éste puede ser representado en la forma:

$$f(x) = A_0(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n).$$

Pero, según la hipótesis, $f(x)$ se anula también en el punto a_0. Entonces, $f(a_0) = 0$, siendo distintos de cero todos los factores lineales. Por eso, $A_0 = 0$, y de la igualdad (2) se deduce que el polinomio $f(x)$ es idénticamente igual a cero. Por consiguiente, $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) \equiv 0$, ó $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$.

Teorema 5. *Si el polinomio*

$$P(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n$$

es idénticamente igual a cero, todos sus coeficientes son iguales a cero.

Demostración. Escribamos el desarrollo de este polinomio en factores según la fórmula (2):

$$P(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \ldots + A_{n-1}x + A_n = \\ = A_0(x-a_1)\ldots(x-a_n). \qquad (1')$$

Si este polinomio es idénticamente igual a cero, también será igual a cero para un valor de x, distinto de $a_1, \ldots, a_n$. Pero, en este caso, los factores $x-a_1, \ldots, x-a_n$ no se anulan y, por tanto, $A_0 = 0$.

De igual manera se demuestra que $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, etc.

Teorema 6. *Los coeficientes correspondientes de dos polinomios idénticamente iguales son iguales.*

Esto se deduce del hecho de que la diferencia entre los polinomios dados es un polinomio idénticamente igual a cero. Por tanto, en virtud del teorema anterior, todos sus coeficientes son ceros.

Ejemplo 4. Si el polinomio $ax^3 + bx^2 + cx + d$ es idénticamente igual al polinomio $x^2 - 5x$, entonces: $a = 0$, $b = 1$, $c = -5$, $d = 0$.

§ 7. RAICES MULTIPLES DEL POLINOMIO

Si ciertos factores lineales del desarrollo de un polinomio de grado n

$$f(x) = A_0 (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n) \tag{1}$$

son iguales, se puede agruparlos y luego, factorizar el polinomio de la manera siguiente:

$$f(x) = A_0 (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \ldots (x - a_m)^{k_m}. \tag{1'}$$

Donde

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n.$$

En este caso se dice que a_1 es una *raíz múltiple* de orden k_1, (k_1, es la multiplicidad de la raíz); a_2 es una raíz múltiple de orden k_2, etc.

Ejemplo. El polinomio $f(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ se desarrolla en los suguientes factores lineales:

$$f(x) = (x-2)(x-2)(x-1).$$

Este desarrollo puede escribirse así:

$$f(x) = (x-2)^2 (x-1),$$

$a_1 = 2$ es una raíz doble; $a_2 = 1$, una raíz simple.

Si el polinomio tiene una raíz múltiple a de orden k, consideremos que el polinomio tiene k raíces iguales. Entonces, del teorema del desarrollo de un polinomio en factores lineales se deduce el teorema siguiente.

Todo polinomio de grado n tiene exactamente n raíces (reales o complejas).

Observación. Todo lo que se ha dicho acerca de las raíces del polinomio

$$f(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n$$

es igualmente cierto para las raíces de una ecuación algebraica:

$$A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n = 0.$$

Demostremos a continuación, el teorema siguiente:

Teorema. *Si a_1 es una raíz múltiple de orden $k_1 > 1$ para el polinomio $f(x)$, entonces a_1 será una raíz múltiple de orden $k - 1$ para la derivada $f'(x)$.*

Demostración. Si a_1 es una raíz múltiple de orden k_1 donde $k_1 > 1$ de la fórmula (1') se deduce:

$$f(x) = (x - a_1)^{k_1} \varphi(x),$$

donde $\varphi(x) = (x - a_2)^{k_2} \ldots (x - a_m)^{k_m}$ no se anula para $x = a_1$, es decir, $\varphi(a_1) \neq 0$. Derivando, tenemos:

$$f'(x) = k_1 (x - a_1)^{k_1 - 1} \varphi(x) + (x - a_1)^{k_1} \varphi'(x) =$$
$$= (x - a_1)^{k_1 - 1} [k_1 \varphi(x) + (x - a_1) \varphi'(x)].$$

Designemos:

$$\psi(x) = k_1 \varphi(x) + (x - a_1) \varphi'(x).$$

Entonces,

$$f'(x) = (x - a_1)^{k_1 - 1} \psi(x),$$

donde:

$$\psi(a_1) = k_1 \varphi(a_1) + (a_1 - a_1) \varphi'(a_1) = k_1 \varphi(a_1) \neq 0,$$

es decir, $x = a_1$ es la raíz múltiple de orden $k_1 - 1$ del polinomio $f'(x)$. De la demostración se deduce que si $k_1 = 1$, a_1 no es una raíz de la derivada $f'(x)$.

Del teorema demostrado se deduce que a_1 es una raíz múltiple de orden $k_1 - 2$, para la derivada $f''(x)$, una raíz de orden $k_1 - 3$, para la derivada $f'''(x)$ ..., una raíz de orden 1 (raíz simple), para la derivada $f^{(k_1 - 1)}(x)$; y no es una raíz para la derivada $f^{(k_1)}(x)$, es decir,

$$f(a_1) = 0, \quad f'(a_1) = 0, \quad f''(a_1) = 0, \; \ldots, \; f^{(k_1 - 1)}(a_1) = 0,$$

pero

$$f^{(k)}(a_1) \neq 0.$$

§ 8. FACTORIZACION DE UN POLINOMIO CON RAICES COMPLEJAS

Las raíces $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de la fórmula (1), § 7, cap. VII pueden ser tanto reales como complejas. Tiene lugar el teorema siguiente.

Teorema. *Si un polinomio $f(x)$ con coeficientes reales tiene la raíz compleja $a + bi$, este polinomio tiene también una raíz conjugada $a - bi$.*

Demostración. Si en el polinomio $f(x)$ sustituimos x por el número $a + bi$, elevamos a unas potencias y agrupamos por separado los términos que contienen y no contienen i, obtenemos:

$$f(a + bi) = M + Ni,$$

donde M y N son las expresiones que no contienen i.

Puesto que $a + bi$ es la raíz del polinomio, tenemos:

$$f(a + bi) = M + Ni = 0$$

de donde:

$$M = 0, \; N = 0$$

Sustituimos ahora x en el polinomio por la expresión $a - bi$. Entonces (según la observación 3, § 2), obtenemos un número conjugado con $M + Ni$, es decir,

$$f(a - bi) = M - Ni.$$

Como $M = 0$, y $N = 0$, se tiene: $f(a - bi) = 0$, es decir, $a - bi$ es una raíz del polinomio.

Por consiguiente, en la factorización

$$f(x) = A_0 (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n)$$

las raíces complejas se encuentran en *pares conjugados*.

Al multiplicar entre sí los factores lineales que corresponden al par de raíces complejas conjugadas, obtenemos un trinomio de segundo grado con coeficientes reales:

$$[x - (a + bi)][x - (a - bi)] = [(x - a) - bi][(x - a) + bi] =$$
$$= (x - a)^2 + b^2 = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = x^2 + px + q,$$

donde $p = -2a$, $q = a^2 + b^2$ son los números reales.

Si el número $a + bi$ es una raíz múltiple de orden k, el número conjugado $a - bi$ es también una raíz múltiple de orden k, de modo que, en la factorización de un polinomio entran tantos factores lineales $x - (a + bi)$ cuantos sean los factores lineales $x - (a - bi)$. Así, *todo polinomio con coeficientes reales se desarrolla en factores con coeficientes reales de primero y segundo grado de multiplicidad correspondiente, es decir,*

$$f(x) = A_0 (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \dots$$
$$\dots (x - a_r)^{k_r} (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_s x + q_s)^{l_s},$$

donde

$$k_1 + k_2 + \dots + k_r + 2l_1 + \dots + 2l_s = n.$$

§ 9. INTERPOLACION. FORMULA DE LA INTERPOLACION DE LAGRANGE

Supongamos que al estudiar cierto fenómeno, fue demostrada la existencia de una dependencia funcional entre las magnitudes x e y, que caracteriza el aspecto cuantitativo de este fenómeno. La función $y = \varphi(x)$ es desconocida, sin embargo, mediante una serie de experiencias determinemos los valores de esta función: y_0, y_1, y_2, ..., y_n para ciertos valores del argumento x_0, x_1, x_2, ..., x_n, pertenecientes al segmento $[a, b]$.

El problema consiste en hallar la función más simple, para facilitar los cálculos (un polinomio, por ejemplo) que sea la expresión exacta o aproximada de la función desconocida $y = \varphi(x)$ en el segmento $[a, b]$. En forma más abstracta el problema puede ser formulado de modo siguiente: los valores de una función desconocida $y = \varphi(x)$ se dan en $n+1$ puntos diferentes: $x_0, x_1, \ldots, x_n$ del segmento $[a, b]$:

$$y_0 = \varphi(x_0),\ y_1 = \varphi(x_1),\ \ldots,\ y_n = \varphi(x_n);$$

es preciso hallar un *polinomio* $P(x)$ del grado inferior o igual a n que exprese aproximadamente la función $\varphi(x)$.

Para esto elijamos un polinomio cuyos valores en los puntos $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ *coincidan* con los correspondientes valores de $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ de la función $\varphi(x)$ (fig. 164). En este caso,

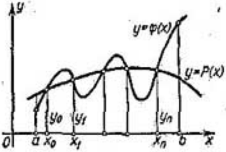

Fig. 164

el problema planteado, que se llama «problema *de interpolación* de la función», se puede formular de modo siguiente: hallar para una función dada $\varphi(x)$ un polinomio $P(x)$ de grado $\leqslant n$, que tome en los puntos dados $x_0, x_1, \ldots, x_n$ los valores

$$y_0 = \varphi(x_0),\ y_1 = \varphi(x_1),\ \ldots,\ y_n = \varphi(x_n).$$

Tomemos para esto un polinomio de n-ésimo grado y de la forma:

$$\begin{aligned} P(x) = {} & C_0 (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) + \\ & + C_1 (x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n) + \\ & + C_2 (x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_n) + \ldots \\ & \ldots + C_n (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}). \end{aligned} \tag{1}$$

Determinemos los coeficientes $C_0, C_1, \ldots, C_n$ de tal manera que se cumplan las condiciones:

$$P(x_0) = y_0,\ P(x_1) = y_1,\ \ldots,\ P(x_n) = y_n. \tag{2}$$

Hagamos $x = x_0$ en la fórmula (1); entonces, teniendo en cuenta las igualdades (2), obtenemos:

$$y_0 = C_0 (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)$$

de donde

$$C_0 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)}.$$

Haciendo, luego, $x = x_1$, obtenemos:

$$y_1 = C_1 (x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)$$

de donde

$$C_1 = \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)}.$$

De igual manera encontramos

$$C_2 = \frac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_n)};$$

. . . .

$$C_n = \frac{y_n}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2) \dots (x_n - x_{n-1})}.$$

Poniendo los valores determinados de los coeficientes en la fórmula (1), obtenemos:

$$P(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)} y_0 +$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_2) \dots (x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2) \dots (x_1 - x_n)} y_1 +$$

$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3) \dots (x - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3) \dots (x_2 - x_n)} y_2 + \dots$$

$$\dots + \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})} y_n. \tag{3}$$

La fórmula enunciada se llama *fórmula de interpolación de Lagrange.*

Admitamos sin demostración que si $\varphi(x)$ tiene una derivada de $(n + 1)$ — ésimo orden en el segmento $[a, b]$, el error cometido, al reemplazar la función $\varphi(x)$ por el polinomio $P(x)$, (es decir, la magnitud $R(x) = \varphi(x) - P(x)$ satisface a la desigualdad:

$$|R(x)| < |(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)| \frac{1}{(n+1)!} \text{máx} |\varphi^{(n+1)}(x)|.$$

Observación. Del teorema 4, § 6, se deduce que el polinomio $P(x)$ es el único que satisface a las condiciones del problema planteado.

Ejemplo. Como resultado de un experimento hemos obtenido los valores de la función $y = \varphi(x)$: $y_0 = 3$ para $x_0 = 1$; $y_1 = -5$ para $x_1 = 2$; $y_2 = 4$ para $x_2 = -4$. Hallar la expresión aproximada de la función $y = \varphi(x)$ por medio del polinomio de segundo grado.

Solución. Según la fórmula (3) tenemos (para $n = 2$):

$$P(x) = \frac{(x-2)(x+4)}{(1-2)(1+4)}\,3 + \frac{(x-1)(x+4)}{(2-1)(2+4)}(-5) + \frac{(x-1)(x-2)}{(-4-1)(-4-2)}\,4,$$

o sea

$$P(x) = -\frac{39}{30}x^2 - \frac{123}{30}x + \frac{252}{30}.$$

§ 10. FORMULA DE LA INTERPOLACION DE NEWTON

Sean conocidos $n+1$ valores de la función $\varphi(x)$: $y_0, y_1, \ldots, y_n$, que corresponden a $n+1$ valores del argumento: $x_0, x_1, \ldots, x_n$, siendo constante la diferencia entre los valores contiguos del argumento. Designemos por h esta diferencia. La tabla de valores de la función desconocida $y = \varphi(x)$ para los valores correspondientes del argumento tendrá la forma siguiente.

x	x_0	$x_1 = x_0 + h$	$x_2 = x_0 + 2h$	$x_n = x_0 + nh$
y	y_0	y_1	y_2	y_n

Formemos un polinomio de grado no superior a n, que tomará valores correspondientes a los de x. Este polinomio representará aproximadamente la función $\varphi(x)$.

Introduzcamos las designaciones:

$\Delta y_0 = y_1 - y_0$; $\Delta y_1 = y_2 - y_1$; $\Delta y_2 = y_3 - y_2$, etc.

$\Delta^2 y_0 = y_2 - 2y_1 + y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0)$,

$\Delta^3 y_0 = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0 = (y_3 - 2y_2 + y_1) - (y_2 - 2y_1 + y_0)$,

$$\Delta^n y_0 = \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0.$$

Estas son las llamadas diferencias de primero, segundo y n-ésimo orden. Escribamos un polinomio que toma los valores

$$y_0,\ y_1 \text{ para } x_0 \text{ y } x_1.$$

Será un polinomio de primer grado

$$P_1(x) = y_0 + \Delta y_0 \frac{x - x_0}{h}. \qquad (1)$$

En efecto,

$$P_1(x)|_{x=x_0}=y_0, \quad P_1|_{x=x_1}=y_0+\Delta y_0\frac{h}{h}=y_0+(y_1-y_0)=y_1.$$

Escribamos un polinomio que toma los valores

$$y_0,\ y_1,\ y_2 \text{ para } x_0,\ x_1,\ x_2.$$

Será un polinomio de segundo grado:

$$P_2(x)=y_0+\Delta y_0\frac{x-x_0}{h}+\frac{\Delta^2 y_0}{2!}\cdot\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right). \qquad (2)$$

Es evidente que

$$P_2\,|_{x=x_0}=y_0,\ P_2\,|_{x=x_1}=y_1.$$

Comprobemos ahora:

$$P_2|_{x=x_2}=y_0+\Delta y_0\cdot 2+\frac{\Delta^2 y_0}{2!}\cdot\frac{2h}{h}\left(\frac{2h}{h}-1\right)=y_2.$$

El polinomio de tercer orden tendrá la forma:

$$P_3(x)=y_0+\Delta y_0\frac{x-x_0}{h}+\frac{\Delta^2 y_0}{2!}\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)+\frac{\Delta^3 y_0}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{x-x_0}{h}\times$$

$$\times\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\left(\frac{x-x_0}{h}-2\right).$$

El polinomio del orden n que asume los valores $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ para $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, será:

$$P_n(x)=y_0+\Delta y_0\frac{x-x_0}{h}+\frac{\Delta^2 y_0}{1\cdot 2}\cdot\frac{x-x_0}{h}\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)+\ \ldots$$

$$\ldots+\frac{\Delta^n y_0}{h}\cdot\frac{x-x_0}{h}\cdot\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left[\frac{x-x_0}{h}-(h-1)\right]. \qquad (4)$$

Mediante una sustitución directa es fácil convencerse de que la igualdad obtenida es correcta. Esta es la fórmula o el polinomio de la interpolación de Newton.

En esencia, el polinomio de Lagrange y el de Newton para la tabla dada de valores, son idénticos aunque escritos de modo diferente. Es decir, el polinomio de grado no superior a h, que tom a $n+1$ valores dados para $n+1$ valores de x, se halla de una sol a manera.

En muchos casos resulta más conveniente utilizar el polinomio de la interpolación de Newton que el de Lagrange. Su particularidad consiste en que, al pasar del polinomio de grado k al polinomio de grado $k+1$, los primeros $k+1$ términos no cambian, sino que se adiciona un término nuevo que es igual a cero, para todos los valores anteriores del argumento.

Observación. Según las fórmulas de Lagrange (véase la fórmula 3 § 10) y de Newton (fórmula 4) se determinan los valores de una función en el segmento $x_0 < x < x_n$. Si estas fórmulas se usan para determinar el valor de la función, cuando $x < x_0$ (lo que se puede hacer cuando $|x - x_0|$ es pequeño), se dice que se efectúa la extrapolación de la tabla hacia atrás. Si se determina el valor de la función para $x_0 < x$, se dice que se efectúa la extrapolación de la tabla hacia adelante.

§ 11. DERIVACION NUMERICA

Supongamos que los valores de una función desconocida $\Phi(x)$ están dados por medio de la tabla que fue examinada anteriormente. Es preciso determinar aproximadamente la derivada de esta función. Con este fin se forma el polinomio de interpolación de Lagrange o de Newton y de este último se halla la derivada.

Puesto que más a menudo se analizan las tablas de iguales diferencias entre los valores vecinos del argumento, utilicemos la fórmula de interpolación de Newton. Sean dados tres valores de la función: y_0, y_1, y_2, que corresponden a los valores: x_0, x_1, x_2 del argumento. Entonces, escribamos el polinomio (2) y derivémoslo. Obtenemos el valor aproximado de la derivada de la función en el segmento $x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2$

$$\varphi^1(x) \approx P_2'(x) = \frac{\Delta y_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2h}\left(2\frac{x - x_0}{h} - 1\right). \tag{5}$$

Cuando $x = x_0$, tenemos:

$$\varphi'(x_0) \approx P_2'(x_0) = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h}. \tag{6}$$

Examinemos el polinomio de tercer orden (véase (3)), y derivándolo, obtenemos la siguiente expresión para su derivada:

$$\varphi'(x) \approx P_3'(x) = \frac{\Delta y_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2h}\left(2\frac{x - x_0}{h} - 1\right) + \\ + \frac{\Delta^3 y_0}{2 \cdot 3h}\left[3\left(\frac{x - x_0}{h}\right)^2 - 6\left(\frac{x - x_0}{h}\right) + 2\right]. \tag{7}$$

En particular, cuando $x = x_0$, tenemos:

$$\varphi'(x_0) \approx P_3'(x) = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h} + \frac{\Delta^3 y_0}{3h}. \tag{8}$$

Al utilizar la fórmula (4), cuando $x = x_0$, obtenemos la siguiente forma para la expresión aproximada de la derivada:

$$\varphi'(x_0) \approx P_n'(x) = \frac{\Delta y_0}{h} - \frac{\Delta^2 y_0}{2h} + \frac{\Delta^3 y_0}{3h} - \frac{\Delta^4 y_0}{4h} + \dots \tag{9}$$

Notemos que para una función que tiene derivadas, la diferencia Δy_0 es una infinitesimal de primer orden respecto a h; $\Delta^2 y_0$, infinitesimal de segundo orden; $\Delta^3 y_0$, de tercer orden, etc.

§ 12. OPTIMA APROXIMACION DE LAS FUNCIONES POR MEDIO DE POLINOMIOS. TEORIA DE CHEBISHEV

Del problema examinado en el § 9, se deduce, naturalmente, lo siguiente: sea una función continua $\varphi(x)$ en el segmento $[a, b]$. ¿Se puede expresarla aproximadamente en forma de un polinomio $P(x)$ con cualquier grado de precisión previamente dado? Es decir, ¿será posible encontrar un polinomio $P(x)$ tal que la diferencia en valor absoluto, entre $\varphi(x)$ y $P(x)$, sea inferior en todos los puntos del segmento $[a, b]$, que cualquier número positivo ε previamente dado? El teorema que sigue y que citamos aquí sin demostración, nos da una respuesta afirmativa*.

Teorema de Weierstrass. *Si la función $\varphi(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un polinomio $P(x)$, que en cada punto de este segmento se cumpla la igualdad:*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

S. N. Bernstein, notable matemático y académico soviético, nos ha proporcionado el siguiente método racional para la formación directa de polinomios aproximadamente iguales a la función continua $\varphi(x)$ en el segmento dado.

Supongamos, por ejemplo, que la función $\varphi(x)$ es continua en el segmento $[0, 1]$.

---

*) Notemos que el polinomio de la interpolación de Lagrange (véase (3) § 9) no da la respuesta a la cuestión planteada. En los puntos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ los valores de este polinomio en realidad son iguales a los valores correspondientes de la función, pero en otros puntos del segmento $[a, b]$ estos valores pueden diferenciarse notablemente.

Formemos la expresión:

$$B_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \varphi\left(\frac{m}{n}\right) C_n^m x^m (1-x)^{n-m}.$$

En esta expresión C_n^m son coeficientes binomiales; $\varphi\left(\frac{m}{n}\right)$ es el valor de la función dada en el punto $x = \frac{m}{n}$. La expresión $B_n(x)$ es un polinomio de n-ésimo grado, llamado *de Bernstein*.

Para todo número arbitrario $\varepsilon > 0$ positivo, se puede buscar un polinomio de Bernstein tal (es decir, elegir su grado n) de manera que para todos los valores de x en el segmento $[0, 1]$ se cumpla la desigualdad:

$$|B_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

Observemos que el análisis del segmento $[0, 1]$ en lugar del segmento arbitrario $[a, b]$ no limita esencialmente las leyes generales puesto que mediante el cambio de variable: $x = a + t(b - a)$, se puede transformar cualquier segmento $[a, b]$, en el segmento $[0, 1]$. Esta transformación conserva el grado del polinomio.

La teoría sobre la óptima aproximación de las funciones mediante polinomios fue desarrollada por el célebre matemático ruso P. L. Chébishev (1821-1894).

Los valiosos resultados que obtuvo en este campo, han influenciado decisivamente en los trabajos de matemáticos posteriores. El punto de partida en la creación de esta teoría fue su trabajo en la teoría de los mecanismos articulados que son de amplio uso en la maquinaria. El estudio de tales mecanismos le condujo a la búsqueda entre todos los polinomios de un grado n dado, cuyo coeficiente de término mayor es igual a la unidad, de un polinomio tal que se desvíe de cero, en el segmento dado, mucho menor que todos los demás polinomios. Este gran matemático logró a resolver el problema y los polinomios hallados por él fueron llamados *polinomios de Chébishev*. Estos poseen muchas propiedades notables y son actualmente un potente medio de investigaciones en numerosos problemas matemáticos y técnicos.

Ejercicios para el capítulo VII

1. Hallar $(3+5i)(4-i)$. *Respuesta*: $17+17i$. 2. Hallar $(6+11i)(7+3i)$. *Respuesta*: $9+95i$. 3. Hallar $\frac{3-i}{4+5i}$. *Respuesta*: $\frac{7}{41}-\frac{19}{41}i$. 4. Hallar $(4-7i)^3$. *Respuesta*: $-524+7i$. 5. Hallar $\sqrt{i}$. *Respuesta*: $\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. 6. Ha-

llar $\sqrt{-5-12i}$. *Respuesta:* $\pm(2-3i)$. 7. Reducir a la forma trigonométrica las expresiones: a) $1+i$. *Respuesta:* $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4}\right)$. b) $1-i$. *Respuesta:* $\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\,\text{sen}\,\frac{7\pi}{4}\right)$. 8. Hallar $\sqrt[3]{i}$. *Respuesta:* $\frac{i+\sqrt{3}}{2}$; $-i$; $\frac{i-\sqrt{3}}{2}$. 9. Expresar en función de $\text{sen}\,x$ y $\cos x$ las siguientes expresiones: $\text{sen}\,2x$, $\cos 2x$, $\text{sen}\,4x$, $\cos 4x$, $\text{sen}\,5x$, $\cos 5x$. 10. Expesar en función del seno y coseno de los arcos múltiples las expresiones: $\cos^2 x$, $\cos^3 x$, $\cos^4 x$, $\cos^5 x$, $\cos^6 x$; $\text{sen}^2 x$, $\text{sen}^3 x$, $\text{sen}^4 x$, $\text{sen}^5 x$. 11. Dividir $f(x)=x^3-4x^2+8x-1$ por $x+4$. *Respuesta:* $f(x)=(x+4)(x^2-8x+40)-161$, es decir, cociente $=x^2-8x+40$; el resto $f(-4)=-161$. 12. Dividir $f(x)=x^4+12x^3+54x^2+108x+81$ por $x+3$. *Respuesta:* $f(x)=(x+3)(x^3+9x^2+27x+27)$. 13. Dividir $f(x)=x^7-1$ por $x-1$. *Respuesta:* $f(x)=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$.

Factorizar los polinomios: 14. $f(x)=x^4-1$. *Respuesta:* $f(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$. 15. $f(x)=x^2-x-2$. *Respuesta:* $f(x)=(x-2)(x+1)$. 16. $f(x)=x^3+1$. *Respuesta:* $f(x)=(x+1)(x^2-x+1)$.

17. Como resultado de un experimento se han obtenido los valores de la función y de x:

$$y_1=4 \text{ para } x_1=0,$$
$$y_2=6 \text{ para } x_2=1,$$
$$y_3=10 \text{ para } x_3=2.$$

Expresar de modo aproximado esta función mediante un polinomio de segundo grado. *Respuesta:* x^2+x+4.

18. Hallar el polinomio de cuarto grado que toma respectivamente los valores 2, 1, —1, 5, 0, para $x = 1, 2, 3, 4, 5$. *Respuesta:*

$$\frac{3}{2}x^4-17x^3+\frac{129}{2}x^2-92x+35.$$

19. Hallar el polinomio de grado posiblemente inferior que toma respectivamente los valores 3, 7, 9, 19 para $x = 2, 4, 5, 10$. *Respuesta:* $2x-1$.

20. Hallar los polinomios de Bernstein de primero, segundo, tercero, cuarto grados para la función $y=\text{sen}\,\pi x$ en el segmento $[0,1]$. *Respuesta:* $B_1(x)=0$; $B_2(x)=2x(1-x)$; $B_3(x)=\frac{3\sqrt{3}}{2}x(1-x)$; $B_4(x)=2x(1-x)\times[(2\sqrt{2}-3)x^2-(2\sqrt{2}-3)x+\sqrt{2}]$.