Matemática Discreta 1 - 2024

Práctico 3: Principio del Palomar y Principio de Inclusión-Exclusión

Ref. Grimaldi Secciones 5.5 y 8.1

Principio del Palomar

Ejercicio 1 Demuestre que cualquier subconjunto de seis elementos del conjunto $S = \{1, 2, \dots, 9\}$ debe contener dos elementos cuya suma sea 10.

Ejercicio 2 Dados cinco punto de un cuadrado de lado 2, pruebe que deben haber dos que estén a distancia menor o igual que $\sqrt{2}$.

Ejercicio 3 Sea $f : A \longrightarrow B$ una función, donde $|A| > |B|$. Demuestre que hay al menos $\lceil |A| \,/\, |B| \rceil$ puntos del dominio que toman el mismo valor.

Ejercicio 4 Demuestre que entre 100.000 personas hay al menos dos que nacieron exactamente al mismo tiempo (hora, minuto y segundo).

Ejercicio 5 Pruebe que al menos uno de m enteros consecutivos es divisible por m.

Ejercicio 6 Halle el menor natural n tal que dados n dígitos diferentes se puede asegurar que existen dos de ellos cuyos cuadrados diferirán en un múltiplo de 6.

Principio de Inclusión-Exclusión

Ejercicio 7 (a) ¿Cuántos enteros entre 1 y 105 inclusive no son divisibles por ninguno de los enteros 3, 5, 7? (b) ¿Cuántos enteros entre 1 y 1155 inclusive son múltiplos de 3 pero no son divisibles por ninguno de los enteros 5,7 y 11?

Ejercicio 8 De 100 estudiantes, 32 estudian matemática, 20 física, 45 biología, 15 matemática y biología, 7 matemática y física, 10 física y biología, 30 no estudian ninguna de las tres materias.

(a) Encuentre el número de estudiantes que estudian las tres materias.

(b) Encuentre el número de estudiantes que estudian exactamente una de las tres materias.

Ejercicio 9 ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 19$$

si x_i es un entero y

(a) $0 \leqslant x_i \leqslant 8$ para todo i?

(b) $0 \leqslant x_1 \leqslant 5$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 6$, $3 \leqslant x_3 \leqslant 7$ y $0 \leqslant x_4 \leqslant 8$?

Ejercicio 10 Se tira un dado 6 veces. Calcule la cantidad de formas en que podemos obtener un número múltiplo de 18 como suma de las 6 tiradas del dado.

Ejercicio 11 Calcule cuántas permutaciones de los dígitos de 123456789 cumplen que:

(a) Ningún dígito está en su posición original.

(b) Los pares no están en su posición original.

(c) Los pares no están en su posición natural y la secuencia debe empezar con los dígitos 1, 2, 3, 4 en algún orden.

Funciones Sobreyectivas

Ejercicio 12 Considere los conjuntos $A = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. ¿Cuántas funciones $f : A \to B$ satisfacen $|f(A)| \leq 3$? Indique la opción correcta:

1. $Sob(10, 3)$.
2. $3^{10} - Sob(10, 3)$.
3. $\binom{7}{3} Sob(10, 3) - \binom{7}{2} Sob(10, 2) + \binom{7}{1} Sob(10, 1)$.
4. $\binom{7}{3} Sob(10, 3) + \binom{7}{2} Sob(10, 2) + \binom{7}{1} Sob(10, 1)$.
5. $\binom{7}{3} Sob(10, 3)$.

Ejercicio 13 Dé un argumento combinatorio para probar que para todo n y m naturales vale:
(a) $n^m = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} Sob(m, i)$.
(b) $Sob(m + 1, n) = n(Sob(m, n - 1) + Sob(m, n))$.
(c) $S(m + 1, n) = S(m, n - 1) + nS(m, n)$.
(d) $Sob(m, n) = \sum_{i=1}^{m-(n-1)} \binom{m}{i} Sob(m - i, n - 1)$.
(e) $n! = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$, donde $d_0 = 1$ y d_k es el número de desarreglos de tamaño k.
En todos los casos, S y Sob indican número de Stirling de segunda especie y de funciones sobreyectivas, respectivamente.

Ejercicios Complementarios

Ejercicio 14 ¿De cuántas formas pueden extraerse 9 canicas de una bolsa si hay 3 de cada uno de los siguientes colores: blanco, rojo, azul, negro?

Ejercicio 15 ¿Cuántos enteros positivos entre 1 y 9.999.999 inclusive tienen a 31 como la suma de sus dígitos?

Ejercicio 16 ¿Cuántas palabras de 4 letras pueden formarse usando las letras A,B,C,D,E si debe aparecer al menos una vocal?

Ejercicio 17 Halle el menor entero n tal que todo tablero rectangular cuadriculado de $4 \times n$, con sus cuadrados pintados de dos colores, tenga al menos un rectángulo cuyas cuatro esquinas estén pintadas del mismo color.

Ejercicio 18 Sea un tablero de 141 filas y 8 columnas. Cada cuadradito del tablero se pinta de blanco o de negro de forma tal que cada fila tenga exactamente cuatro cuadraditos pintados de negro. Demuestre que hay al menos tres filas con igual secuencia de colores.