Matemática Discreta 1 - 2024

Práctico 2: Funciones, inducción completa

Ref. Grimaldi Secciones 5.2 y 4.1

Ejercicio 1. Determinar si las siguientes funciones son inyectivas y/o sobreyectivas:

1. $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(a) = a - 1$.
2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(a) = a^3 - 2a$.
3. $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(a) = a^3 - 2a$.
4. $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(a, b) = a$.
5. $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(a, b) = 2^a 3^b$.
6. $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(a, b) = 2^a 3^b$.
7. $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $f(n, m) = 2^m(2n + 1) - 1$. *Aclaración:* Suponemos que $0 \in \mathbb{N}$.
8. $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = 2^y(2x + 1) - 1$.

Ejercicio 2. Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ dos funciones y $g \circ f$ la composición de f con g, es decir que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Si considera que los conjuntos A, B y C son finitos, pruebe o encuentre un contraejemplo a las siguientes afirmaciones:

1. Si f y g son inyectivas también lo es $g \circ f$.
2. Si f y g son sobreyectivas también lo es $g \circ f$.
3. Si $g \circ f$ es inyectiva también lo es f.
4. Si $g \circ f$ es inyectiva también lo es g.
5. Si $g \circ f$ es sobreyectiva también lo es f.
6. Si $g \circ f$ es sobreyectiva también lo es g.

Ejercicio 3. Dados $A = \{1, 2, \ldots, m\}$ y $B = \{1, 2, \ldots, n\}$, calcule la cantidad de funciones f de A a B que satisfacen:

1. f es inyectiva.
2. f es biyectiva
3. $f(i) < f(j)$ para todo $i < j$ en A.
4. $f(i) \leqslant f(j)$ para todo $i \leqslant j$ en A.

Ejercicio 4. Sea A un conjunto con 10 elementos y B uno con 3 elementos.

a) ¿Cuántas funciones diferentes de A a B hay?

b) Si denotamos con $\mathcal{P}(X)$ al conjunto de partes de X, es decir al conjunto de todos los subconjuntos de X ¿Cuál es el cardinal de $\mathcal{P}(B)$? ¿y el de $\mathcal{P}(A)$?

c) Considere las funciones $f : B \longrightarrow \mathcal{P}(B)$ que verifican para todo $x : \quad f(x) \neq \{x\}$. ¿Cuántas de dichas funciones hay?

Inducción Completa

Ejercicio 5 Demuestre que $7^n - 2^n$ es divisible por 5, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 6 Encuentre (y demuestre) cuáles números naturales n pueden expresarse como suma de treses y/o cincos, es decir,

$$\text{existen } i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \ n = 3i + 5j.$$

Ejercicio 7 Demuestre que $10^{n+1} + 3 \times 10^n + 5$ es múltiplo de 9 para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 8 (a) Demuestre la siguiente igualdad:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.$$

(b) Demuestre que para $n \geqslant 1$ se cumple la siguiente igualdad:

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^3 = n^2\,(2n^2 - 1).$$

Ejercicio 9 Sea m el menor número natural que verifica $2^m > m^2 + 1$. Halle m y pruebe por inducción que si $n \geq m$ entonces $2^n > n^2 + 1$.

Ejercicio 10 Demuestre que si

$$a_n = 2a_{n-1} + 7a_{n-2} + a_{n-3}$$

y $a_1 = 3, a_2 = 10, a_3 = 30$, entonces

$$a_n \geqslant 3^n \quad \text{para todo } n \geqslant 1.$$

Ejercicio 11 Demuestre que en la lista de inscriptos al curso de Matemática Discreta I hay una cantidad par de estudiantes que tienen una cantidad impar de amigos inscriptos en el mismo curso (no vale llamar a Bedelía).

Ejercicio 12 Considere la suma

$$\sum_{k=m}^{n} C_m^k.$$

Calcúlela para algunos casos usando el triángulo de Pascal, conjeture cuánto suma en general y demuéstrelo por inducción.

Ejercicio 13 Considere un tablero cuadriculado de 2^n cuadrados por lado al cual le falta un cuadradito en algún lugar. Demuestre que se puede cubrir dicho tablero con piezas en forma de L formadas por 3 cuadraditos cada una.

Ejercicio 14 Un rompecabezas consta de un cierto número de piezas. Dos o más piezas con frontera común se pueden juntar para formar una pieza grande. Llamaremos bloque a un conjunto formado por una o más piezas unidas por su frontera común, el que se puede unir a otro bloque con fronteras comunes. Cuando todas las piezas se han unido en un solo bloque, decimos que el rompecabezas está armado. Demuestre que, para armar un rompecabezas de n piezas, se necesitan n-1 movidas (una movida es juntar dos bloques con fronteras comunes).

Ejercicios Complementarios

Ejercicio 15 Demuestre que:
(a) $n^3 - n$ es divisible por 3 para todo n entero.
(b) La suma de los cubos de tres enteros consecutivos es divisible por 9.

Ejercicio 16 Demuestre que todo natural n puede expresarse como la suma de cinco y/o sietes siempre que n sea mayor o igual a 24, es decir para todo $n \geq 24$ existen $i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $n = 5i + 7j$.

Ejercicio 17 Se define

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i!.i \qquad \text{para todo } n \geq 1.$$

Demuestre que $S_n = (n+1)! - 1$.

Ejercicio 18 La sucesión F_n de Fibonacci se define recursivamente del siguiente modo:
$F_0 = 0, F_1 = 1$ y

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \qquad \text{para todo } n \geqslant 2.$$

Pruebe que:

1. $\sum\limits_{i=0}^{n} F_i = F_{n+2} - 1.$

2. $\sum\limits_{i=1}^{2n} F_i F_{i-1} = F_{2n}^2.$

3. $\sum\limits_{i=1}^{n} F_i^2 = F_n F_{n+1}.$

Ejercicio 19 Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Conjeture una fórmula para A^n y demuéstrela.

Ejercicio 20 Se considera la función f definida sobre $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\}$ por :

$$f(x) = \frac{1}{3x+2}.$$

Demuestre que la derivada n-ésima de f es:

$$f^{(n)}(x) = \frac{3^n (-1)^n n!}{(3x+2)^{n+1}}.$$

Ejercicio 21 Sean $f(x) = xe^x$ y $g(x) = 1/x$, demuestre las siguientes igualdades para las derivadas n-ésimas:

$$f^{(n)}(x) = e^x(x+n) \quad g^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}.$$