Teoría de Circuitos

Práctico 5

Resolución de circuitos en Laplace

2012

Cada ejercicio comienza con un símbolo el cual indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básica, ★ media, ✷ avanzada, y ✹ difícil.

✦ Ejercicio 1

El condensador de la figura 1 está cargado a V_{C0} con la polaridad indicada; cuando en $t = 0$ se cierra la llave LL.

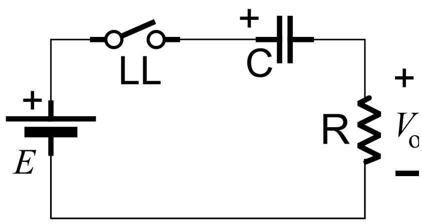

Figura 1:

(a) Hallar el circuito equivalente en Laplace. Calcular v_o en $t = 0^+$ y en $t \to +\infty$.

(b) Hallar $v_o(t)$ por Laplace, $\forall t \geq 0$.

(c) Hallar $v_o(t)$, $\forall\, t \geq 0$, utilizando la fórmula de carga y descarga del condensador:

$$v_C(t) = [V_F - V_I].[1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}] + V_I$$

✦ Ejercicio 2

El condensador de la figura 2 está cargado a V_{C0} con la polaridad indicada cuando en $t = 0$ se cierra la llave LL. Hallar el voltaje del condensador para todo instante positivo.

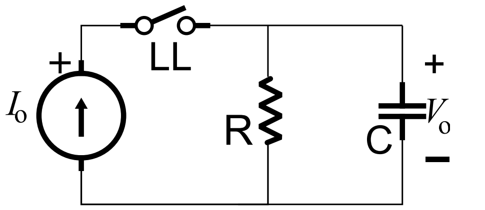

Figura 2:

⋆ Ejercicio 3

Los circuitos de la figura 3 se encuentran en régimen cuando se conmuta la llave LL en $t = 0$.

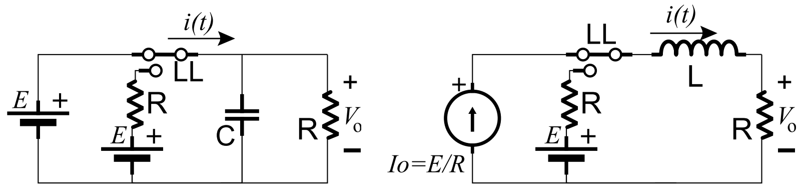

Figura 3:

(a) Calcular $v_o(t)$ e $i(t)$ en el circuito de la izquierda $\forall\, t > 0$. Hallar $v_o(0^+)$ y $v_o(0^-)$.

(b) Calcular $v_o(t)$ e $i(t)$ en el circuito de la derecha $\forall\, t > 0$. Hallar $i(0^+)$ e $i(0^-)$.

⋆ Ejercicio 4

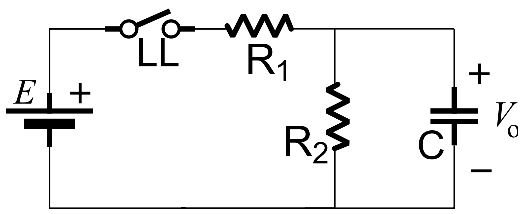

Figura 4:

Dado el circuito de la figura 4, con el condensador descargado:

(a) Calcular $v_o(t)$ a partir de $t = 0$, instante en el que se cierra la llave LL.

(b) En $t = T$, se abre la llave LL; calcular el nuevo $v_o(t)$.

⋆ Ejercicio 5

El circuito de la figura 5 se encuentra en régimen cuando en $t = 0$ se abre la llave LL. Calcular $i(t)$ y la tensión en bornes de la llave a partir de dicho instante.

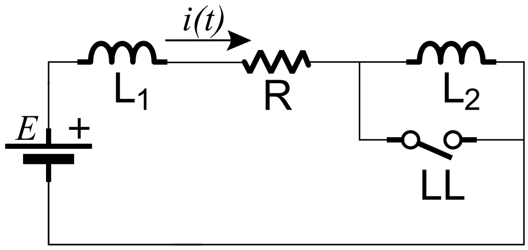

Figura 5:

Solución

Ejercicio 1

(a) El circuito equivalente en Laplace es el de la figura **??**.

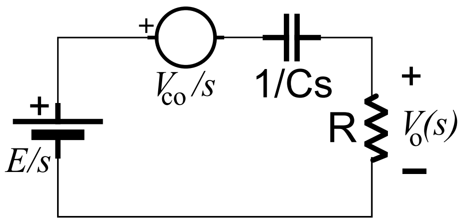

Figura 6:

Calculamos entonces:

$$V_o(s) = \frac{R}{(R + \frac{1}{Cs})}\left(\frac{E - V_{C0}}{s}\right) = \frac{RC}{RCs + 1}(E - V_{C0})$$

Como nos encontramos bajo las hipótesis del teorema del valor inicial:

$$v_o(t)|_{t=0^+} = \lim_{s\to+\infty} sV_o(s) = \lim_{s\to+\infty} \frac{RCs}{RCs + 1}(E - V_{C0}) = E - V_{C0}$$

Como también nos encontramos bajo las hipótesis del teorema del valor final:

$$\lim_{t\to+\infty} v_o(t) = \lim_{s\to 0^+} sV_o(s) = \lim_{s\to 0^+} \frac{RCs}{RCs + 1}(E - V_{C0}) = 0$$

(b)

$$V_o(s) = \frac{RC}{RCs + 1}(E - V_{C0}) = \frac{E - V_{C0}}{s + \frac{1}{RC}}$$

Antitransformando:

$$v_o(t) = (E - V_{C0}).\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{RC}}}$$

(c)

$$V_I = v_C(t)|_{t=0^+} = E - v_0(t)|_{t=0^+} = E - (E - V_{C0}) = V_{C0}$$
$$V_F = \lim_{t\to+\infty} v_C(t) = E - \lim_{t\to+\infty} v_o(t) = E$$

$$v_C(t) = [V_F - V_I].[1 - e^{-\frac{t}{RC}}] + V_I = (E - V_{C0})[1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}] + V_{C0}$$

$$v_o(t) = E - v_C(t) = (E - V_{C0})\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$$

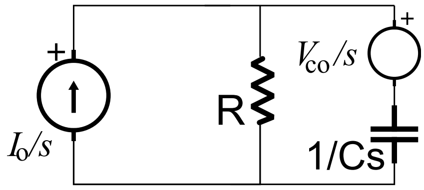

Figura 7:

Ejercicio 2

El circuito equivalente en Laplace es el de la figura ??.
Sean $I_R(s)$ e $I_C(s)$ las corrientes en Laplace por la resistencia y el condensador respectivamente; como el voltaje en sus bornes es igual en todo momento:

$$V_R(s) = I_R(s)R$$
$$V_C(s) = \frac{V_{C0}}{s} + I_C(s)\frac{1}{Cs}$$

$$I_R(s)R = \frac{V_{C0}}{s} + I_C(s)\frac{1}{Cs}$$

Además:

$$\frac{I_o}{s} = I_R(s) + I_C(s) \Rightarrow I_R(s) = \frac{I_o}{s} - I_C(s)$$

Obtenemos entonces:

$$R\frac{I_o}{s} - RI_C(s) = \frac{V_{C0}}{s} + I_C(s)\frac{1}{Cs}$$

Despejando $I_C(s)$ y luego $V_C(s)$:

$$I_C(s) = \frac{RI_o - V_{C0}}{R(s + \frac{1}{RC})}$$

$$V_C(s) = \frac{(V_{C0} - I_oR)}{s + \frac{1}{RC}} + \frac{I_oR}{s}$$

Finalemente, antitransformando:

$$v_C(t) = I_oR(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}) + V_{C0}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$$

Ejercicio 3

(a) El circuito equivalente en Laplace al circuito de la izquierda de la figura 3, luego de ser conmutada la llave, es el de la figura ??:
Planeamos nudos:

$$I = I_R + I_C$$

Luego la malla de la derecha:

$$\frac{E}{s} + \frac{I_C}{Cs} = I_RR$$

Y la malla de la izquierda:

$$\frac{E}{s} - RI = \frac{E}{s} + \frac{I_C}{Cs}$$

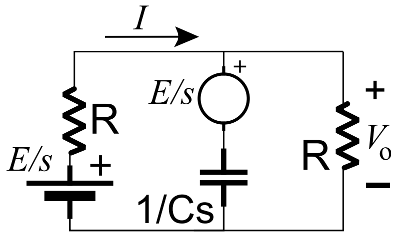

Figura 8:

De esta última despejamos I en función de I_C:

$$I = -\frac{I_C}{RCs}$$

Utilizando este resultado y la ecuación de nudos obtenemos:

$$I_C = -\frac{RCs}{1 + RCs} I_R$$

Utilizando ahora la ecuación de la malla de la izquierda obtenemos I_R:

$$I_R = \frac{E(1 + RCs)}{Rs(2 + RCs)}$$

Para luego con la ley de ohm obtener V_o:

$$V_o = \frac{E(1 + RCs)}{s(2 + RCs)}$$

Podemos también calcular I:

$$I = -\frac{I_C}{RCs} = \frac{I_R}{1 + RCs} = \frac{E}{Rs(2 + RCs)}$$

Antitransformando tanto V_o como I obtenemos:

$$v_o(t) = \frac{E}{2}(1 + \mathrm{e}^{-\frac{2t}{RC}})$$

$$i(t) = \frac{E}{2R}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{2t}{RC}})$$

En este caso se cumple que $v_o(0^-) = v_o(0^+) = E$.

(b) El circuito equivalente en Laplace al circuito de la derecha de la figura 3, luego de ser conmutada la llave, es el de la figura **??**:
Planteamos la única malla:

$$\frac{E}{s} + \frac{EL}{R} = (Ls + 2R)I$$

Despejamos entonces la corriente I:

$$I = \frac{E(R + Ls)}{Rs(Ls + 2R)}$$

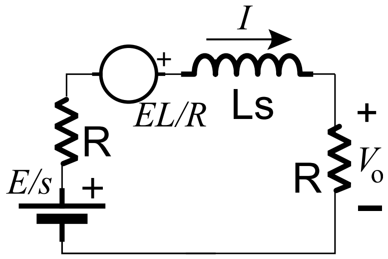

Figura 9:

La ley de ohm nos dice que el voltaje V_o será:

$$V_o = \frac{E(E + Ls)}{s(Ls + 2R)}$$

Antitransformando:

$$v_o(t) = \frac{E}{2}(1 + \mathrm{e}^{-\frac{2R}{L}t})$$

Y naturalmente:

$$i(t) = \frac{E}{2R}(1 + \mathrm{e}^{-\frac{2R}{L}t})$$

En este caso se cumple que $i(0^-) = i(0^+) = \frac{E}{R}$

Ejercicio 4

(a) El circuito equivalente en Laplace al de la figura 4 es el de la figura **??**

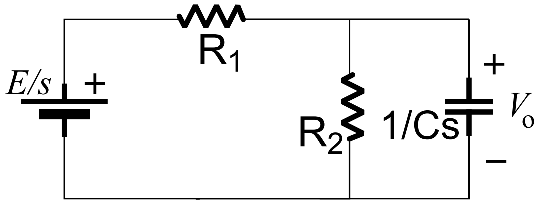

Figura 10:

Sea $Z_{eq} = R_2 || \frac{1}{Cs} = \frac{R_2}{1+R_2Cs}$

$$V_o = \frac{Z_{eq}}{(R_1 + Z_{eq})} \frac{E}{s} = \frac{R_2 E}{R_1 R_2 C s (s + \frac{R_1+R_2}{R_1 R_2 C})}$$

Antitransformando:

$$v_o(t) = \frac{ER_2}{R_1 + R_2}(1 - \mathrm{e}^{-(\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C})t})$$

(b) En $t = T$ se abre la llave. Obtenemos el circuito de la figura **??**, donde V_{C0} vale $v_o(t)|_{t=T}$. Siendo $v_o(t)$ el calculado en la parte (a).

$$V_{C0} = \frac{ER_2}{R_1 + R_2}(1 - \mathrm{e}^{-(\frac{R_1+R_2}{R_1R_2C})T})$$

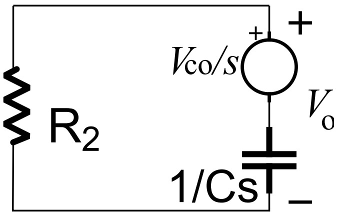

Figura 11:

Calculamos la única malla del circuito:

$$\frac{V_{C0}}{s} = (R_2 + \frac{1}{Cs})I$$

$$I = \frac{V_{C0}C}{R_2Cs + 1}$$

Sea entonces el volaje en bornes del condensador:

$$V_o = -\frac{I}{Cs} + \frac{V_{C0}}{s} = -\frac{V_{C0}}{R_2Cs(s + \frac{1}{R_2C})} + \frac{V_{C0}}{s} = \frac{V_{C0}}{s + \frac{1}{R_2C}}$$

Antitransformando:

$$v_o(t) = V_{C0}.\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{R_2C}}} = \frac{\mathrm{ER_2}}{\mathrm{R_1 + R_2}}(1 - \mathrm{e}^{-(\frac{\mathrm{R_1+R_2}}{\mathrm{R_1R_2C}})\mathrm{T}}).\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{R_2C}}}$$

Ejercicio 5

Sabemos que cuando el circuito de la figura 5 está en régimen, las bobinas se comportan como cables. Por lo tanto en el momento en que se abre la llave la corriente por la bobina L_1 será:

$$I_0 = \frac{E}{R}$$

Si trabajamos en Laplace, obtenemos entonces el circuito equivalente de la figura ??.

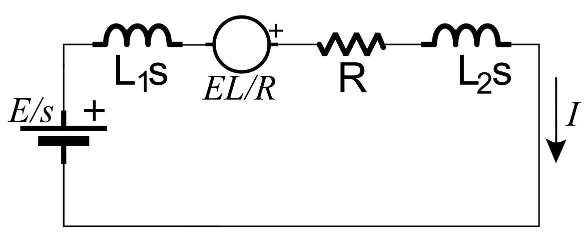

Figura 12:

Planteamos la única malla del circuito:

$$\frac{E}{s} + \frac{EL}{R} = I((L_1 + L_2)s + R)$$

$$I = \frac{E(R + L_1 s)}{R(L_1 + L_2)s\left[s + \frac{R}{L_1+L_2}\right]}$$

Podemos calcular también el voltaje en bornes de la llave; que es en rigor, el voltaje en bornes de L_2:

$$V_{LL} = V_{L2} = IL_2 s = \frac{EL_2(R + L_1 s)}{R(L_1 + L_2)\left[s + \frac{R}{L_1+L_2}\right]}$$

Antitransformando ambos resultados:

$$i(t) = \frac{E}{R}(1 - \mathrm{e}^{-(\frac{R}{L_1+L_2})t}) + \frac{EL_1}{R(L_1 + L_2)}\mathrm{e}^{-(\frac{R}{L_1+L_2})t}$$

$$v_{LL}(t) = \frac{EL_2^2}{(L_1 + L_2)^2}\mathrm{e}^{-(\frac{R}{L_1+L_2})t}$$

Nota: Véase como en este caso, debido al cambio tan abrupto de topología en el circuito, existe una discontinuidad tanto en la corriente por la bobina L_2 como en el voltaje en sus bornes:

$$\begin{array}{cc} v_{LL}(0^-) = 0 & v_{LL}(0^+) = \frac{EL_2^2}{(L_1+L_2)^2} \\ i(0^-) = 0 & i(0^+) = \frac{EL_1}{R(L_1+L_2)} \end{array}$$