Teoría de Circuitos

Práctico 6
Teoremas de Circuitos

2012

Cada ejercicio comienza con un símbolo el cual indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básica, ★ media, ✷ avanzada, y ✹ difícil.

✦ Ejercicio 1

Determine los equivalentes Thévenin y Norton de cada uno de los circuitos de la figura 1 desde los terminales A y B. Todos ellos trabajando en régimen sinusoidal:

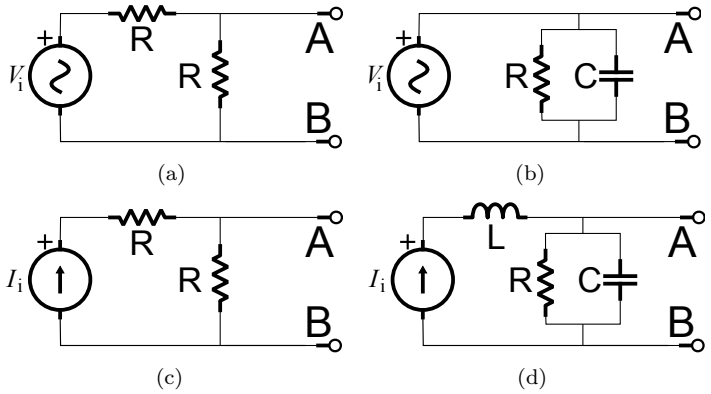

Figura 1:

★ Ejercicio 2

Determine los equivalentes Thévenin y Norton del circuito de la figura 2 en los terminales A y B.

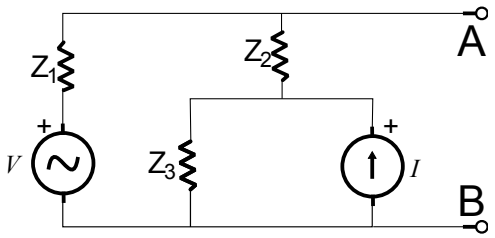

Figura 2:

✷ Ejercicio 3

Se tiene una fuente real de la que se le desconocen sus parámetros. Sólo se sabe que se le hicieron los siguientes ensayos en régimen sinusoidal y a una única frecuencia $\omega = 1000\frac{rad}{s}$:

- Primero se la conectó a un voltímetro ideal, el cuál arrojó una medida de $|v(t)| = 15V$.
- Una vez apagada, se la conectó a una fuente ideal $v_i(t) = 50Vcos(\omega t)$ en serie con un amperímetro ideal. Éste registró una intensidad de módulo $0.05A$ y en fase con la fuente.

Ésta esta conectada a un circuito como en la figura 3.
Datos: $R = 1K\Omega$, $C = 1\mu F$.

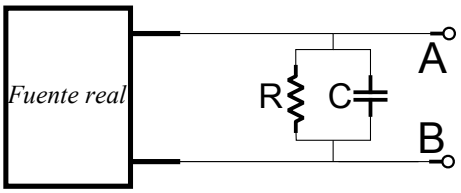

Figura 3:

(a) Halle el equivalente Thévenin del circuito desde los terminales A y B trabajando en régimen sinusoidal.

(b) Suponga que usted era el técnico encargado de realizar los ensayos. ¿Cómo hubiera procedido de manera de obtener un equivalente Thévenin de forma más sencilla y precisa?

Asumiendo que la impedancia de salida de la fuente es puramente resistiva para toda frecuencia:

(c) ¿Qué sucederá con el equivalente calculado en la parte (a) si multiplicamos $\times 2$ la frecuencia de trabajo?

✷ Ejercicio 4

Las fuentes reales de tensión de la figura 4 tienen equivalentes Thévenin dados por sus tensiones de vacío E1=E2= 220 V y por sus impedancias serie Z_1 =

$Z_2 = (1 + j10)\Omega$. El resto de las impedancias valen: $Z_3 = j5\Omega$, $Z_4 = j10\Omega$, $Z5 = 800\Omega$.

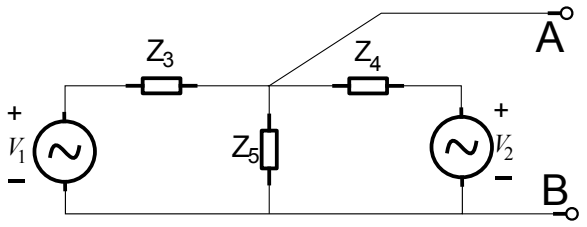

Figura 4:

(a) Determine el equivalente Thévenin de la red desde los puntos A y B.

(b) Se produce un cortocircuito entre los puntos A y B. Calcule la corriente de cortocircuito.

★Ejercicio 5

Sea el circuito de la figura 5:

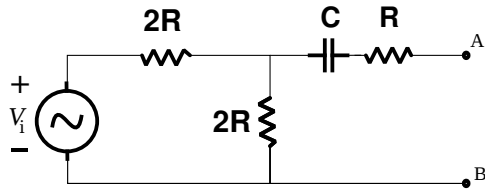

Figura 5:

(a) Calcular el equivalente Thevenin desde las terminales A y B.

Se tiene ahora el circuito 6:

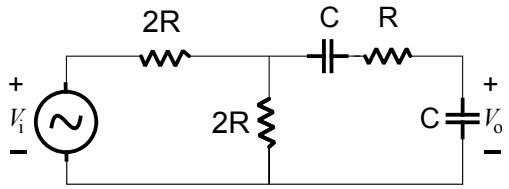

Figura 6:

(b) Hallar la transferencia $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$

(c) Relalizar un diagrama de bode asintótico. Tomar $\omega_0 = \frac{1}{RC}$

Solución

Ejercicio 1

Como estamos trabajando en régimen sinusoidal, podemos trabajar con fasores. Para todos los casos suponemos:

$$v_i(t) = Re\left\{\bar{V}_i.\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\mathrm{t}}\right\}$$

Además todos los equivalentes Thévenin tienen la forma[1] de la figura **??**. Sólo resta hallar los valores de $\bar{V}_{AB}$ y Z_v en cada caso.

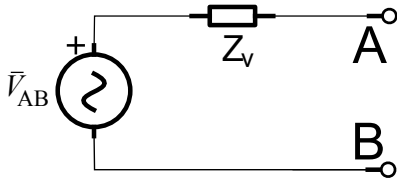

Figura 7:

(a) Calculamos primero el voltaje de vacío:

$$\bar{V}_{AB} = \frac{R}{R+R}\bar{V}_i = \frac{\bar{V}_i}{2}$$

Cortocircuitamos ahora la fuente para calcular la impedancia vista desde los terminales A y B:

$$Z_v = R||R = \frac{R}{2}$$

(b) Calculamos primero el voltaje de vacío:

$$\bar{V}_{AB} = \bar{V}_i$$

Cortocircuitamos ahora la fuente para calcular la impedancia vista desde los terminales A y B:

$$Z_v = 0$$

Nota: ¡Véase que en este caso el equivalente es trivial! Pués cualquiera sea la carga que se le ponga al cicuito, ésta tendrá en sus bornes un voltaje $\bar{V}_i$. En otras palabras la carga no "sentirá" la existencia de la impedancia $R||\frac{1}{Cj\omega}$ en paralelo.

(c) Calculamos primero el voltaje de vacío:

$$\bar{V}_{AB} = R\bar{I}_i$$

Abrimos el circuito donde antes estaba la fuente de corriente para calcular impedancia vista desde los terminales A y B:

$$Z_v = R$$

[1] De hecho todos los equivalentes Théveinin tienen esta forma. Durante todo el práctico sólo nos centraremos en hallar los valores de $\bar{V}_{AB}$ y Z_v.

(d) Calculamos primero el voltaje de vacío:

$$\bar{V}_{AB} = (R||\frac{1}{Cj\omega})\bar{I}_i = \frac{R}{RCj\omega + 1}\bar{I}_i$$

Abrimos el circuito donde antes estaba la fuente de corriente para calcular impedancia vista desde los terminales A y B:

$$Z_v = (R||\frac{1}{Cj\omega})$$

Ejercicio 2

Equivalente Thévenin
Primero calculemos V_{AB}. Para ello definamos las corrientes como en la figura **??**.

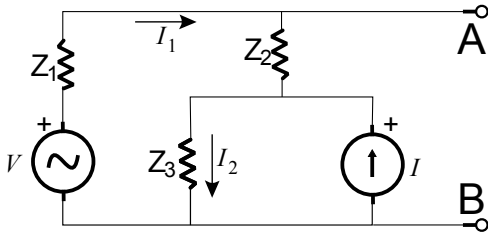

Figura 8:

Planeamos entonces un nudo y dos mallas:

$$I_2 = I + I_1$$
$$V = (Z_1 + Z_2).I_1 + Z_3.I_2$$
$$V_{AB} = V - Z_1.I_1$$

Despejamos I_2 de la segunda ecuación:

$$I_2 = \frac{V - (Z_1 + Z_2).I_1}{Z_3}$$

Despejamos ahora I_1:

$$\frac{V - (Z_1 + Z_2).I_1}{Z_3} = I + I_1$$

$$I_1 = \frac{V - Z_3.I}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

Despejamos finalmente V_{AB}:

$$V_{AB} = \frac{(Z_2 + Z_3)V + Z_1.Z_3.I}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

Apaguemos ahora ambas fuentes para calcular Z_v. Recuérdese que para apagar una fuente de voltaje debemos quitarla y poner un cable, miestras que para apagar una fuente de corriente debemos quitarla y dejar el circuito abierto. Obtenemos entonces un circuito como en la figura **??**.

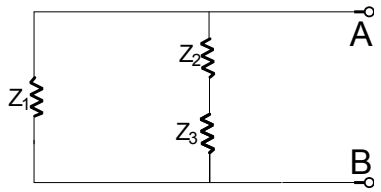

Figura 9:

$$Z_v = Z_1||(Z_2 + Z_3) = \frac{Z_1(Z_2 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

Equivalente Norton
Los equivalentes Norton tienen la forma de la figura **??**.

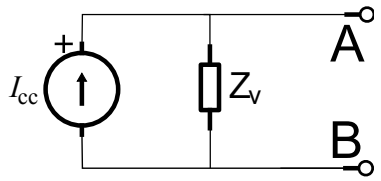

Figura 10:

Primero calculamos I_{cc}. Para eso definimos las corrientes como en la figura **??** y cortocircuitamos los terminales A y B.

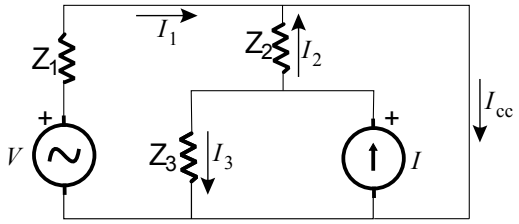

Figura 11:

Planteamos dos nudos y dos mallas:

$$I = I_2 + I_3$$
$$I_{cc} = I_1 + I_2$$
$$V = Z_1.I_1$$
$$I_2.Z_2 = I_3.Z_3$$

Despejando de las ecuaciones anteriores:

$$I_{cc} = \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3}.I + \frac{V}{Z_1}$$

La impedancia vista será la misma que en el equivalente Thévenin:

$$Z_v = Z_1||(Z_2 + Z_3) = \frac{Z_1(Z_2 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

Ejercicio 3

(a) No sabemos como es por dentro la fuente, pero tenemos los datos suficientes como para calcular su el equivalente Thévenin. Además estamos trabajando en régimen sinusoidal por lo que podemos trabajar con fasores.
Del primero de los dos ensayos ya conocemos el voltaje de vacío de la fuente:

$$\bar{V}_{AB1} = 15V$$

Y del segundo ensayo podemos despejar la impedancia de salida de la fuente:

$$50V = Z_{v1}.\bar{I} = Z_{v1}0.05A$$

$$Z_{v1} = 1K\Omega$$

Obtenemos entonces el circuito equivalente de la figura **??** al que le debemos calcular su equivalente Thévenin.

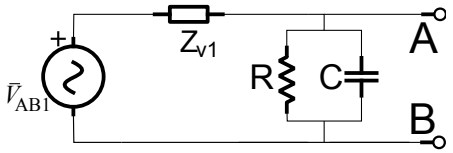

Figura 12:

Le calculamos entonces su voltaje de vacío $\bar{V}_{AB2}$:

$$\bar{V}_{AB2} = \frac{(R||\frac{1}{Cj\omega})}{(R||\frac{1}{Cj\omega}) + Z_{v1}}\bar{V}_{AB1} = \frac{R\bar{V}_{AB1}}{R + Z_{v1} + Z_{v1}RCj\omega}$$

Reemplazando por los datos del problema:

$$\bar{V}_{AB2} = \frac{15V}{2 + j}$$

Apagamos ahora V_{AB1} para calcular la impedancia vista Z_{v2}:

$$Z_{v2} = R||Z_{v1}||\frac{1}{Cj\omega} = \frac{R}{2}||\frac{1}{Cj\omega} = \frac{R}{2 + RCj\omega}$$

$$Z_{v2} = \frac{1000}{2 + j}\Omega$$

Obtenemos finalmente un equivalente Thévenin como el de la figura **??** con voltaje de vacío $\bar{V}_{AB2}$ e impedancia vista Z_{v2}.

(b) Los ensayos realizados al principio deberían haber sido con el circuito ya cargado y listo para operar. De esta manera hubieramos podido calcular directamente $\bar{V}_{AB2}$ y Z_{v2} de manera más sencilla y con menos incertidumbre.

(c) Tanto $\bar{V}_{AB2}$ como Z_{v2} variarán con la frecuencia. La dependencia con la misma es explícita.

$$\bar{V}_{AB2}^{'} = \frac{15V}{2 + j2}$$

$$Z_{v2}^{'} = \frac{1000}{2 + j2}\Omega$$

Ejercicio 4

(a) Modelamos las fuentes por sus equivalentes Thévenin. Trabajaremos entonces con el circuito real de la figura **??** y con las corrientes definidas como en el mismo.

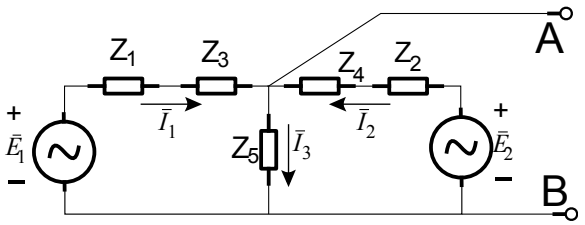

Figura 13:

Planteamos un nudo y las dos mallas de los costados:

$$\bar{I}_3 = \bar{I}_1 + \bar{I}_2$$
$$\bar{E}_1 = \bar{I}_1(Z_1 + Z_3) + \bar{I}_3 Z_5$$
$$\bar{E}_2 = \bar{I}_2(Z_2 + Z_4) + \bar{I}_3 Z_5$$

Sabiendo que $\bar{E}_1 = \bar{E}_2 = \bar{E}$ despejamos $\bar{I}_2$ en función de $\bar{I}_1$:

$$\bar{I}_2 = \frac{Z_1 + Z_3}{Z_2 + Z_4}.\bar{I}_1$$

Despejamos ahora de la ecuación del nudo a $\bar{I}_1$ en función de $\bar{I}_3$:

$$\bar{I}_1 = \frac{Z_2 + Z_4}{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4}.\bar{I}_3$$

Luego, de la malla de la izquierda:

$$\bar{I}_3 = \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4}{(Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_4) + (Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4)Z_5}.\bar{E}$$

Finalmente:

$$\bar{V}_{AB} = \bar{I}_3.Z_5 = \frac{(Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4)Z_5}{(Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_4) + (Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4)Z_5}.\bar{E}$$

Reemplazando con los valores del problema:

$$\bar{V}_{AB} = \frac{352000 + j6160000}{1301 + j28035} V \approx 219.85V.\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.61^{\circ}}$$

Calculemos ahora la impedancia vista desde los terminales A y B:

$$Z_v = (Z_1 + Z_3)||(Z_2 + Z_4)||Z_5 = \frac{(Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_4)Z_5}{(Z_1 + Z_3)(Z_2 + Z_4) + (Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4)Z_5}$$

Reemplazando con los valores del problema:

$$Z_v = \frac{-239200 + j28000}{1301 + j28035} \approx 8.58\Omega.\mathrm{e}^{\mathrm{j}85.98^{\circ}}$$

(b) La corriente de cortocircuito se puede calcular de la siguiente manera:

$$\bar{I}_{cc} = \frac{\bar{V}_{AB}}{Z_v} \approx 25.62A.\mathrm{e}^{-\mathrm{j}86.29^{\circ}}$$

Ejercicio 5

(a) Como no sabemos nada acerca de V_i ni nos dicen que el circuito está en régimen, lo suponemos en reposo. Trabajamos entonces en Laplace y no tenemos datos previos.
Primero calculamos el voltaje de vacío V_{AB}:

$$V_{AB} = \frac{2R}{2R + 2R} V_i = \frac{V_i}{2}$$

Calculamos ahora la impedancia vista Z_v desde los terminales A y B:

$$Z_v = (2R||2R) + \frac{1}{Cs} + R = \frac{2RCs + 1}{Cs}$$

(b) Conociendo el equivalente Thévenin del circuito de la figura 5, sabemos que al circuito de la figura 6 lo podemos modelar como en la figura **??**.

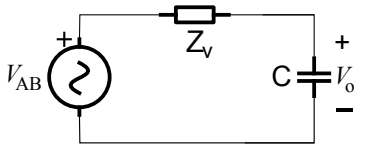

Figura 14:

Calculamos entonces V_o en función de V_i para luego hallar $H(s)$:

$$V_o = \frac{\frac{1}{Cs}}{\frac{1}{Cs} + Z_v} V_{AB} = \frac{V_i}{4 + 4RCs}$$

(c) Trabajamos ahora si en fasores:

$$H(j\omega) = \frac{\omega_0}{4(\omega_0 + j\omega)}$$

- $\underline{\omega \ll \omega_0}$: $H(j\omega) \approx \frac{1}{4}$

  $Arg(H(j\omega)) = 0$
  $|H(j\omega)|_{dB} = -20log(4)$

- $\underline{\omega_0 \ll \omega}$: $H(j\omega) \approx \frac{\omega_0}{4j\omega}$

  $Arg(H(j\omega)) = -\frac{\pi}{2}$
  $|H(j\omega)|_{dB} = 20log(\omega_0) - 20log(4) - 20log(\omega)$

Obtenemos finalmente el diagrama de bode de la figura **??**.

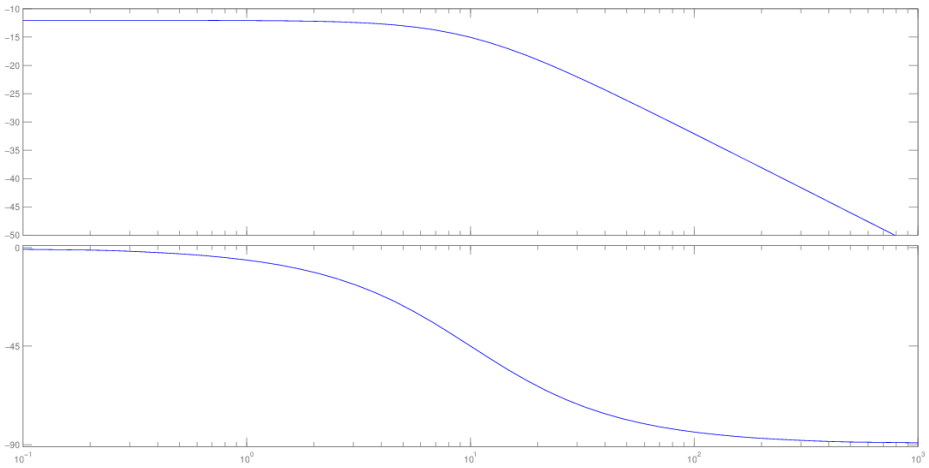

Figura 15: Diagrama de bode real para el caso particular $\omega_0 = 10 rad.s^{-1}$.