Teoría de Circuitos

Práctico 2
Componentes Básicos de Circuitos

2012

Cada ejercicio comienza con un símbolo el cual indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básica, ★ media, ✷ avanzada, y ✹ difícil.

✦ Ejercicio 1

(a) Usando la definición escribir las unidades de:

1. Voltaje [1]
2. Corriente
3. Resistencia
4. Inductancia
5. Capacidad

en función de las unidades elementales (tiempo, carga eléctrica, peso y distancia) [2]

(b) Hallar, utilizando lo anterior, las unidades de las siguientes expresiones:

1. R/L
2. LC
3. RC
4. $v \cdot i$

(c) En el circuito de la figura 1 se desea hallar el cociente $\frac{v_i}{i_i}$ que es la resistencia vista por la fuente v_i.

Para ello se hace la siguiente deducción:

Por ley de Ohm en la resistencia R_1 $\quad i_i = \frac{v_i - v_2}{R_1} \quad (1)$

Por ley de nudos de kirchoff en el nodo 1 $\quad i_i + gv_2 = \frac{v_2}{R_2} \quad (2)$

Sustituyendo 1 en 2 $\quad \frac{v_i - v_2}{R_1} + gv_2 = \frac{v_2}{R_2} \quad (3)$

[1] Recordar la definición de voltaje (diferencia de): la diferencia de potencial $V_1 - V_2$ entre dos puntos 1 y 2 de un campo eléctrico es el trabajo necesario por unidad de carga para mover la carga del punto 2 al punto 1. Recordar también que las unidades de energía y trabajo son las mismas y son $[trabajo] = [fuerza][distancia] = [peso]\frac{[distancia]^2}{[tiempo]^2}$

[2] En las siguientes partes las R siempre denotan resistencias, las L siempre bobinas, las C siempre condensadores, las v siempre voltajes y las i corrientes

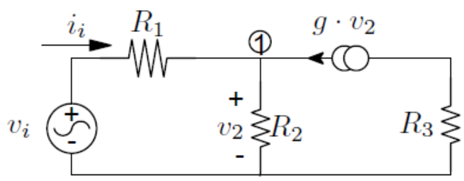

Figura 1:

$$\Rightarrow v_2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}-g\right)=\frac{v_i}{R_1} \tag{4}$$

$$\Rightarrow \frac{v_i}{i_i}=\frac{v_i}{\frac{v_i-v_2}{R_1}}=\frac{v_i}{v_i-v_2}R_1=\frac{R_1 v_i}{v_i-\frac{\frac{v_i}{R_1}}{\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}-g}} \tag{5}$$

Cancelando v_i:

$$\frac{v_i}{i_i}=\frac{R_1}{1-\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2-gR_1R_2}} \tag{6}$$

$$\Rightarrow \frac{v_i}{i_i}=R_1\frac{R_1+R_2-gR_1R_2}{R_1+R_2-gR_1R_2-R_1R_2} \tag{7}$$

$$\Rightarrow \frac{v_i}{i_i}=R_1\frac{R_1+R_2-gR_1R_2}{R_1+R_2-(g+1)R_1R_2} \tag{8}$$

I. ¿Qué unidades debe tener g?
II. ¿La ecuación 8 es correcta dimensionalmente?
III. Encontrar el error en la secuencia de ecuaciones usando argumentos dimensionales.

✦ Ejercicio 2

(a) Probar las equivalencias de la figura 2

(b) Hallar L y C para que los dos circuitos de la figura 3 sean equivalentes.

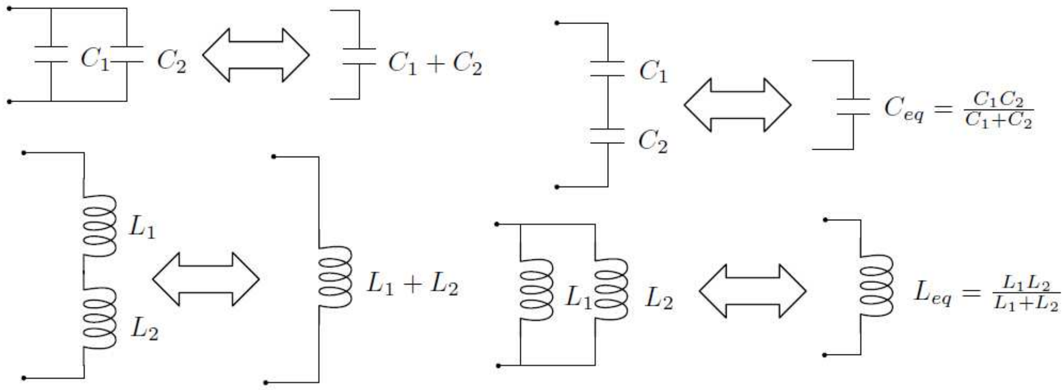

Figura 2:

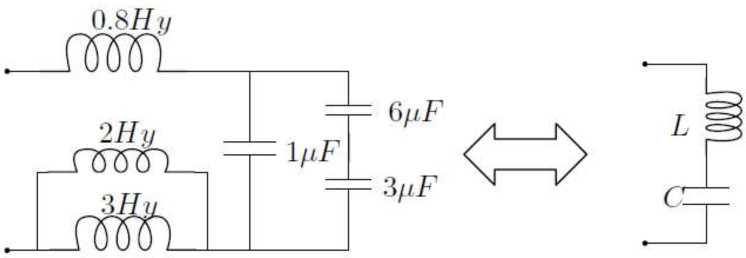

Figura 3:

⋆ Ejercicio 3

(a) Justificar las siguientes afirmaciones:

1. En régimen de continua, el condensador se comporta como un circuito abierto.
2. En régimen de continua, el inductor se comporta como un cortocircuito.

(b) Mediante argumentos similares, verificar si las afirmaciones son válidas en régimen sinusoidal (excitaciones del tipo $A\cos(\omega t + \varphi)$).

∗ Ejercicio 4

En el circuito de la figura 4:

(a) Se sabe que $v_1(t) = 3e^{-2\times 10^4 s^{-1} t} V$. Hallar v_2, v_3 y v_s.

(b) Si ahora $v_s = 1V$, hallar v_1 en régimen.

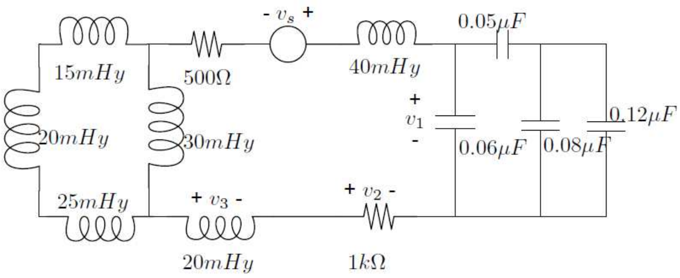

Figura 4:

✶Ejercicio 5

El circuito de la figura 5 se encuentra en régimen, cuando en $t = 0$ se abre la llave. Calcular $i\,(0^+)$, $i\,(0^-)$, $v\,(0^+)$, $v\,(0^-)$.

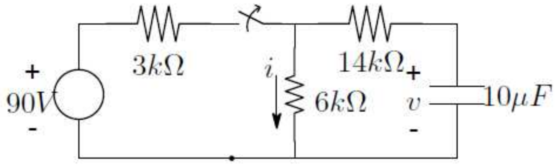

Figura 5:

✶Ejercicio 6

Para el circuito de la figura 6, hallar una ecuación diferencial que vincule $v_o(t)$ con $v_i(t)$, sabiendo que se cumple $L/R = R \cdot C = \tau$.

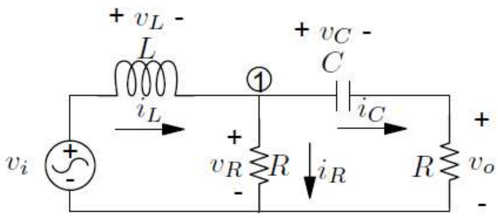

Figura 6:

Solución

Ejercicio 1

(a)

(1) $[V] = Kg.\frac{m^2}{s^2}\frac{1}{C}$

(2) $[I] = \frac{C}{s}$

(3) $[R] = Kg.\frac{m^2}{C^2 s}$

(4) $[L] = Kg.\frac{m^2}{C^2}$

(5) $[C] = \frac{C^2.s^2}{Kg.m^2}$

(b)

(1) $\left[\frac{R}{L}\right] = \frac{1}{s}$

(2) $[LC] = s^2$

(3) $[RC] = s$

(4) $[vi] = \frac{Kg.m^2}{s^3}$

(c)

(I) g debe tener unidades de conductancia (Ω^{-1}) ya que $g.v_2$ debe tener unidades de corriente.

(II) ¡NO! ¡La ecuación (8) no es correcta dimensionalmente!
$\Rightarrow$ $(g+1)$ no esta bien dimensionalmente por lo visto en la parte (I).

(III) El error está en la ecuación (6).
$\Rightarrow \left[\frac{v}{i}\right] = \frac{\Omega}{1-\Omega} \neq \Omega$ ✗

Ejercicio 2

(a)

- <u>Paralelo de condensadores:</u>
  Sean:
  i_1 la corriente por C_1,
  i_2 la corriente por C_2,
  i la corriente que llega al nudo,
  v el voltaje en bornes de ambos condensadores.
  Buscamos C_{eq} tal que $i = C_{eq}\frac{dv}{dt}$:

$$\left.\begin{array}{c} i_1 = C_1\frac{dv}{dt} \\ i_2 = C_2\frac{dv_c}{dt} \\ i = i_1 + i_2 \end{array}\right\} \Rightarrow i = C_1\frac{dv}{dt} + C_2\frac{dv}{dt}$$

$$i = (C_1 + C_2)\frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow\ C_{eq} = C_1 + C_2$$

- Serie de condensadores:
  Sean:
  v_1 el voltaje en bornes de C_1,
  v_2 el voltaje en bornes de C_2,
  $v = v_1 + v_2$,
  i la corriente por ambos condensadores.
  Buscamos C_{eq} tal que $i = C_{eq}\frac{dv}{dt}$:

$$\left.\begin{array}{r} i = C_1\frac{dv_1}{dt} \\ i = C_2\frac{dv_2}{dt} \\ \frac{dv}{dt} = \frac{dv_1}{dt} + \frac{dv_2}{dt} \end{array}\right\} \Rightarrow\ \frac{dv}{dt} = \frac{i}{C_1} + \frac{i}{C_2}$$

$$\frac{i}{C_{eq}} = \frac{i}{C_1} + \frac{i}{C_2}\ \Rightarrow\ \frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$\Rightarrow\ C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

- Serie de inductores:
  Sean:
  v_1 el voltaje en bornes de L_1,
  v_2 el voltaje en bornes de L_2,
  $v = v_1 + v_2$,
  i la corriente por ambos inductores.
  Buscamos L_{eq} tal que $v = L_{eq}\frac{di}{dt}$:

$$\left.\begin{array}{r} v_1 = L_1\frac{di}{dt} \\ v_2 = L_2\frac{di}{dt} \\ v = v_1 + v_2 \end{array}\right\} \Rightarrow\ v = L_1\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt}$$

$$v = (L_1 + L_2)\,\frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow\ L_{eq} = L_1 + L_2$$

- Paralelo de inductores:
  Sean:
  i_1 la corriente por el inductor L_1,
  i_2 la corriente por el inductor L_2,
  i la corriente que llega al nudo,
  $i = i_1 + i_2$
  v el voltaje en bornes de ambos inductores.
  Buscamos L_{eq} tal que $v = L_{eq}\frac{di}{dt}$:

$$\left.\begin{array}{r} v = L_1\frac{di_1}{dt} \\ v = L_2\frac{di_2}{dt} \\ \frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \end{array}\right\} \Rightarrow\ \frac{di}{dt} = \frac{v}{L_1} + \frac{v}{L_2}$$

$$\frac{v}{L_{eq}} = \frac{v}{L_1} + \frac{v}{L_2} \Rightarrow \frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

$$\Rightarrow L_{eq} = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2}$$

(b) Utilizando lo aprendido en la parte anterior logramos el equivalente de la Figura **??**:

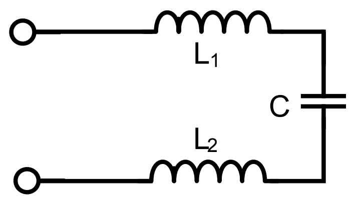

Figura 7:

Donde:

- $L_1 = 0.8Hy$
- $L_2 = 1.2Hy$
- $C = 3\mu F$

¡Pero el orden de una serie no importa! Obtenemos entonces el siguiente circuito equivalente:

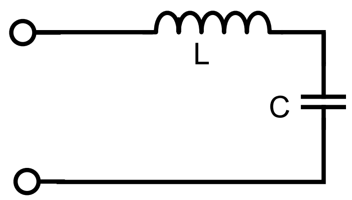

Figura 8:

Donde:

- $L = 2Hy$
- $C = 3\mu F$

Ejercicio 3

(a)

(1) Estudiemos para el caso de un circuito $R-C$:

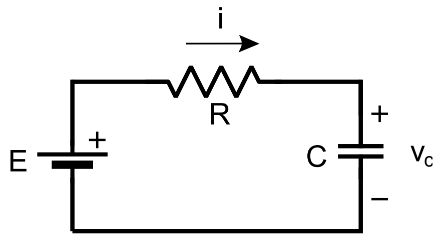

Figura 9: Circuito R-C.

$$\left.\begin{array}{r} E = Ri + v_c \\ i = C\frac{dv_c}{dt} \end{array}\right\} \Rightarrow E = RC\frac{dv_c}{dt} + v_c \tag{9}$$

Sabemos que para encontrar la solución completa de una ecuación diferencial debemos hallar la solución homogénea y también la particular. La ecuación (1) no es la excepción...

$$v_{ctot} = v_{ch} + v_{cp}$$

Suponemos una solución homogenea de la forma: $v_{ch} = A.\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{t}}$.

$$\lambda A.\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{t}}\mathrm{RC} + \mathrm{VA.e}^{\lambda\mathrm{t}} = 0 \Rightarrow \lambda\mathrm{RC} + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-1}{\mathrm{RC}}$$

$$v_{ch} = A.\mathrm{e}^{\frac{-1}{\mathrm{RC}}\mathrm{t}} \tag{10}$$

Además vemos facilmente que la solución particular debe ser:

$$v_{cp} = E \tag{11}$$

Notar que: $E = 0.RC + E$ ✔

Finalmente, juntando las ecuaciones (2) y (3) y conociendo la relación voltaje - corriente de un condensador:

$$\begin{array}{r} v_c = E + A.\mathrm{e}^{\frac{-1}{\mathrm{RC}}\mathrm{t}} \\ i = -\frac{A}{R}.\mathrm{e}^{\frac{-1}{\mathrm{RC}}\mathrm{t}} \end{array}$$

Definimos la solución en régimen de un circuito, como la solución del mismo cuando el tiempo tiende a infinito (se extingue la componente transitoria de la solución):

$$\lim_{t\to+\infty} i = 0$$

¡Circuito abierto!

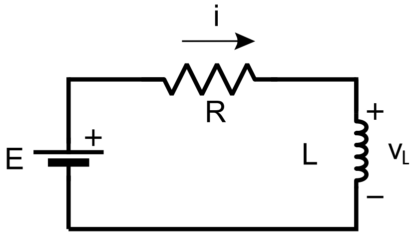

Figura 10: Circuito R-L.

(2) Estudiamos para el caso de un circuito $R - L$:

$$\left.\begin{array}{r} E = Ri + v_L \\ v_L = L\frac{di}{dt} \end{array}\right\} \Rightarrow \ E = Ri + L\frac{di}{dt} \tag{12}$$

Sabemos que:

$$i_{tot} = i_h + i_p$$

Suponemos una solución homogenea de la forma: $i_h = A.\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{t}}$.

$$L\lambda A.\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{t}} + \mathrm{RA.e}^{\lambda\mathrm{t}} = 0 \ \Rightarrow \ \lambda\mathrm{L} + \mathrm{R} = 0 \ \Rightarrow \ \lambda = \frac{-\mathrm{R}}{\mathrm{L}}$$

$$i_h = A.\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\mathrm{t}} \tag{13}$$

Además vemos que facilmente que la solución particular debe ser:

$$i_p = \frac{E}{R} \tag{14}$$

Notar que: $E = R.\frac{E}{R} + L.0$ ✔

Finalmente, juntando las ecuaciones (5) y (6) obtenemos:

$$i_{tot} = \frac{E}{R} + A.\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\mathrm{t}}$$

Notar que:

$$\lim_{t\to+\infty} i = \frac{E}{R}$$

¡Cortocircuito!

(b)

(1) Circuito $R - C$, caso sinusoidal:

Reutilizando resultados anteriores y agregando el dato $E = A.cos(\omega t + \phi)$ obtenemos:

$$A.cos(\omega t + \phi) = v_c(t) + RC.\frac{dv_c(t)}{dt}$$

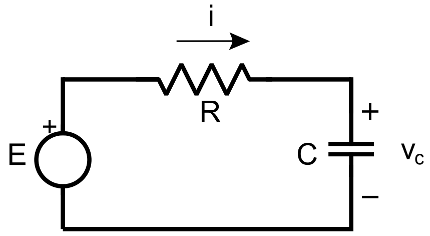

Figura 11: Circuito R-C sinusoidal.

$$v_{ctot} = v_{ch} + v_{cp}$$

Todo indica que v_{cp} debe ser de la forma:

$$v_{cp}(t) = B_1.sen(\omega t + \phi) + B_2.cos(\omega t + \phi) \tag{15}$$

$\Rightarrow\ A.cos(\omega t + \phi) = B_1.sen(\omega t + \phi) + B_2.cos(\omega t + \phi) + RC\omega B_1.cos(\omega t + \phi) - RC\omega B_2.sen(\omega t + \phi)$

$$\left\{ \begin{array}{c} A = B_2 + RC\omega B_1 \\ B_1 = RC\omega B_2 \end{array} \right\} \Rightarrow\ A = B_2[1 + (RC\omega)^2]$$

$$B_1 = \frac{RC\omega A}{1 + (RC\omega)^2} \quad , \quad B_2 = \frac{A}{1 + (RC\omega)^2}$$

La solución homogenea es independiente de la entrada; por lo tanto será como en el caso de corriente continua:

$$v_h(t) = B_3.\mathrm{e}^{\frac{-1}{\mathrm{RC}}\mathrm{t}} \tag{16}$$

Finalmente:

$$v_c(t) = \frac{RC\omega A}{1 + (RC\omega)^2}.sen(\omega t + \phi) + \frac{A}{1 + (RC\omega)^2}.cos(\omega t + \phi) + B_3.\mathrm{e}^{\frac{-1}{\mathrm{RC}}\mathrm{t}}$$

En régimen tenemos que:

$$\lim_{t \to +\infty} v_c(t) = \frac{RC\omega A}{1 + (RC\omega)^2}.sen(\omega t + \phi) + \frac{A}{1 + (RC\omega)^2}.cos(\omega t + \phi)$$

La afirmación 1 <u>NO</u> es válida para el régimen sinusoidal.
De hecho ver que si $\omega \gg \frac{1}{RC} \ \Rightarrow\ v_c(t) \to 0$.
¡Para altas frecuencias el condensador tiende a comportarse como un cable!

(2) Circuito $R - L$, caso sinusoidal:

Reutilizando resultados anteriores y agregando el dato $E = A.cos(\omega t + \phi)$ obtenemos:

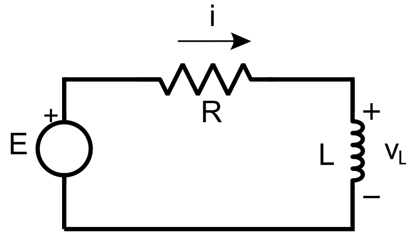

Figura 12: Circuito R-L sinusoidal.

$$A.cos(\omega t + \phi) = Ri(t) + L.\frac{i(t)}{dt}$$

$$i_{tot} = i_h + i_p$$

Todo indica que i_p debe ser de la forma:

$$i_p(t) = B_1.sen(\omega t + \phi) + B_2.cos(\omega t + \phi) \tag{17}$$

$\Rightarrow\ A.cos(\omega t + \phi) = RB_1.sen(\omega t + \phi) + RB_2.cos(\omega t + \phi) + L\omega B_1.cos(\omega t + \phi) - L\omega B_2.sen(\omega t + \phi)$

$\left\{ \begin{array}{c} A = RB_2 + L\omega B_1 \\ B_1 = \frac{L\omega}{R} B_2 \end{array} \right\} \Rightarrow\ A = B_2[R + \frac{(L\omega)^2}{R}]$

$$B_1 = \frac{L\omega A}{R^2 + (L\omega)^2} \quad , \quad B_2 = \frac{RA}{R^2 + (L\omega)^2}$$

La solución homogenea es independiente de la entrada; por lo tanto será como en el caso de corriente continua:

$$i_h(t) = B_3.\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\mathrm{t}} \tag{18}$$

Finalmente:

$$i(t) = \frac{L\omega A}{R^2 + (L\omega)^2}.sen(\omega t + \phi) + \frac{RA}{R^2 + (L\omega)^2}.cos(\omega t + \phi) + B_3.\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{R}}{\mathrm{L}}\mathrm{t}}$$

En régimen tenemos que:

$$\lim_{t \to +\infty} i(t) = \frac{L\omega A}{R^2 + (L\omega)^2}.sen(\omega t + \phi) + \frac{RA}{R^2 + (L\omega)^2}.cos(\omega t + \phi)$$

La afirmación 2 <u>NO</u> es válida para el régimen sinusoidal.
De hecho ver que si $\omega \gg \sqrt{\frac{R}{L}}\ \Rightarrow\ i(t) \to 0$.
¡Para altas frecuencias la bobina tiende a comportarse como un circuito abierto!

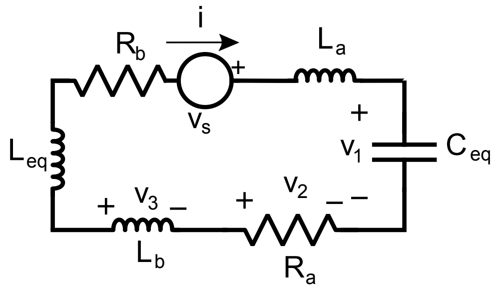

Figura 13: Circuito equivalente de problema 4.

Ejercicio 4

(a) Utilizando los conocimientos adquiridos en el curso, logramos el siguiente circuito equivalente:
Donde:

- $L_a = 40mHy$
- $L_b = 20mHy$
- $R_a = 1000\Omega$
- $R_b = 500\Omega$
- $C_{eq} = [(0.12\mu F||0.08\mu F) + 0.05\mu F]||0.06\mu F = 0.1\mu F$
- $L_{eq} = 60mHy||30mHy = 20mHy$

Conocemos $v_1(t)$ y C_{eq}. Por lo tanto podemos calcular $i(t)$:

$$\left.\begin{array}{r} \frac{dv_1(t)}{dt}.C_{eq} = i(t) \\ \frac{dv_1(t)}{dt} = -6000\frac{V}{s}.\mathrm{e}^{-20000\mathrm{t}} \end{array}\right\} \Rightarrow i(t) = -6mA.\mathrm{e}^{-20000\mathrm{t}}$$

Planteamos ahora las siguentes ecuaciones:

$$v_2(t) = -R_a.i(t) \quad , \quad v_3(t) = -L.\frac{di(t)}{dt}$$

Oteniendo:

$$v_2(t) = 6A.\mathrm{e}^{-20000\mathrm{t}} \quad , \quad \mathrm{v_3(t) = -2.4A.e^{-20000t}}$$

Finalmente:

$$v_s(t) = (L_a + L_{eq})\frac{di(t)}{dt} + v_1 - v_2 - v_3 + R_b i(t)$$

$$v_s(t) = 3.6V.\mathrm{e}^{-20000\mathrm{t}}$$

(b) Ahora $v_s(t) = 1V$ (corriente continua).
Para toda esta parte hablaremos de C_{eq} como C para facilitar la notación.
Basándonos en la parte anterior podemos escribir:

$$v_s(t) = (L_a + L_b + L_{eq})\frac{di(t)}{dt} + v_1 + (R_a + R_b)i(t) \tag{19}$$

Además:

$$\begin{cases} \frac{dv_1(t)}{dt}.C = i(t) \\ \frac{dv_1^2(t)}{dt^2}.C = \frac{di(t)}{dt} \end{cases}$$

$$v_s(t) = v_1(t) + (R_a + R_b)C.\frac{dv_1(t)}{dt} + (L_a + L_b + L_{eq})C.\frac{dv_1^2(t)}{dt^2}$$

$$v_1 = v_{1h} + v_{1p}$$

Probamos una solución de la forma:

$$v_{1h}(t) = A.\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{t}}$$

$$A.\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{t}} + (\mathrm{R_a}+\mathrm{R_b})\mathrm{CA}\lambda.\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{t}} + (\mathrm{L_a}+\mathrm{L_b}+\mathrm{L_{eq}})\mathrm{C.A}\lambda^2.\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{t}} = 0 \Rightarrow (\mathrm{L_a}+\mathrm{L_b}+\mathrm{L_{eq}})\mathrm{C}\lambda^2 + (\mathrm{R_a}+\mathrm{R_b})\mathrm{C}\lambda + 1 = 0$$

Queda como tarea para el estudiante comprobar que este polinomio tiene raices λ_1 y λ_2 complejas conjugadas y con parte real negativa.

$$v_{1h}(t) = A_1.\mathrm{e}^{\lambda_1 \mathrm{t}} + \mathrm{A_2}.\mathrm{e}^{\lambda_2 \mathrm{t}} \tag{20}$$

Vemos facilmente que:

$$v_{1p}(t) = v_s(t) = 1V \tag{21}$$

Las ecuaciones (12) y (13) nos afirman que:

$$v_1(t) = A_1.\mathrm{e}^{\lambda_1 \mathrm{t}} + \mathrm{A_2}.\mathrm{e}^{\lambda_2 \mathrm{t}} + 1\mathrm{V}$$

En régimen (recordar que λ_1 y λ_2 tienen parte real negativa):

$$\lim_{t \to +\infty} v_1(t) = 1V$$

¡Resultado que deberíamos haber predicho! ¿Por qué?

Ejercicio 5

En primer lugar resolvamos el primer circuito en régimen.
Sabemos que en régimen de corriente continua, un condensador es un circuito abierto ($i_c = 0$). El circuito a resolver es el siguiente:

Donde:

- $E = 90V$
- $R_1 = 3K\Omega$

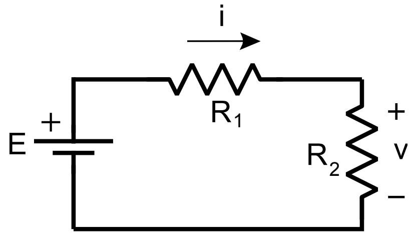

Figura 14:

- $R_2 = 6K\Omega$

Tenemos que:
$i = \frac{E}{R_1+R_2} = \frac{90V}{9K\Omega} = 10mA$
$v = R_2 i = 6K\Omega.10mA = 60V$

Concluímos facilmente que:

$$v = v(0^-) = 60V$$
$$i = i(0^-) = 10mA$$

Abrimos la llave...
Trabajamos entonces con el siguiente circuito:

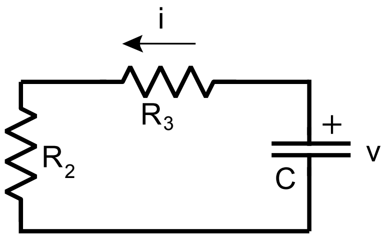

Figura 15:

Donde:

- $C = 10\mu F$
- $R_2 = 6K\Omega$
- $R_3 = 14K\Omega$

Por la parte anterior sabemos que la carga inicial del condensador es $v = 60V$.
Entonces:

$$v(0^+) = 60V$$

Resolvemos el circuito:
$\left.\begin{array}{r} v = i(R_2 + R_3) \\ i = -C\frac{dv}{dt} \end{array}\right\} \Rightarrow v = -C(R_2 + R_3)\frac{dv)}{dt}$
LLamemos R a $R_2 + R_3 \Rightarrow R = 20K\Omega$

$$\frac{dv}{dt}.RC + v = 0$$

Ecuación diferencial con entrada nula. ¡Tiene sólo solución homogénea!

Sabemos que esta ecuación diferencial tiene solución homogénea de la forma:

$$v(t) = A.\mathrm{e}^{\lambda \mathrm{t}}$$

$\lambda RC.A.\mathrm{e}^{\lambda\mathrm{t}} + \mathrm{A.e}^{\lambda\mathrm{t}} = 0 \Rightarrow \lambda\mathrm{RC} + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{\mathrm{RC}}$

$$v(t) = A.\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{RC}}\mathrm{t}}$$

Hallamos A con la condición inicial: $v(0^+) = A = 60V$
Hallamos finalmente la corriente: $-\frac{dv(t)}{dt}.C = i(t) = -(-\frac{C}{RC}A.\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{RC}}\mathrm{t}})$

$$i(t) = 3mA.\mathrm{e}^{-\frac{1}{\mathrm{RC}}\mathrm{t}}$$

$$i(0^+) = i(0) = 3mA$$

Ejercicio 6

Primero que nada hacemos ley de nudos de Kirchhoff en 1.:

$$i_L = i_R + i_C \tag{22}$$

Además, por ley de mallas de Kirchhoff:

$$\begin{array}{c} v_i = v_L + v_C + v_o \\ v_R = v_C + v_L \end{array} \tag{23}$$

Las leyes que rigen la relación voltaje-corriente en cada componente nos dicen:

$$\begin{array}{ccc} v_L = L\frac{di_L}{dt} & , & v_R = i_R R \\ i_C = C\frac{dv_C}{dt} & , & v_o = v_C R \end{array} \tag{24}$$

Juntando entonces las ecuaciones **??** y **??**:

$$v_i = L\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{C}\int i_C dt + v_o$$

Por la ecuación **??**:

$$v_i = L\left[\frac{di_R}{dt} + \frac{di_C}{dt}\right] + \frac{1}{C}\int i_C dt + v_o$$

Por la ecuación **??**:

$$v_i = \frac{L}{R}\frac{dv_R}{dt} + L\frac{di_C}{dt} + \frac{1}{C}\int i_C dt + v_o$$

Volvemos a utilizar la ecuación **??** para obtener:

$$v_i = \frac{L}{R}\left[\frac{dv_C}{dt} + \frac{dv_o}{dt}\right] + L\frac{di_C}{dt} + \frac{1}{C}\int i_C dt + v_o$$

Pero:

$$\begin{cases} i_C = \frac{v_o}{R} \\ \frac{dv_C}{dt} = \frac{i_C}{C} = \frac{v_o}{RC} \end{cases}$$

Entonces:

$$v_i = \frac{L}{R^2C}v_o + \frac{L}{R}\frac{dv_o}{dt} + \frac{1}{RC}\int v_o dt + \frac{L}{R}\frac{dv_o}{dt} + v_o$$

Reordenando el resultado y sabiendo que $\tau = RC = \frac{R}{L}$ obtenemos finalmente:

$$v_i = \frac{1}{\tau}\int v_o dt + 2v_o + 2\tau\frac{dv_o}{dt}$$