Clase 19 2023/11/09

Luego para hacer una restricción o extensión tenemos que considerar

$A \overset{p}{\twoheadrightarrow} B \overset{\iota}{\hookrightarrow} C \qquad \mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{a}^e = p(\mathfrak{a})B = \{\sum p(a_i)b_i : a_i \in \mathfrak{a}\ b_i \in B\}$

$= \{\sum p(a_i)p(s_i) : a_i \in \mathfrak{a}\ s_i \in A\} = \{\sum p(a_i s_i) : a_i \in \mathfrak{a}\ s_i \in A\}$

$= \{p(a) : a \in \mathfrak{a}\}$

O sea que la complejidad de la extensión de escalares se dá para situaciones de una inclusión.

Sea $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}[i]$ $\quad i = \sqrt{-1}$, se puede probar que $\mathbb{Z}$ admite un

algoritmo de división (rakido) pero $\mathbb{Z}[i]$ también.

Ejercicio Probar que $\mathbb{Z}[i]$ es un dominio euclidiano.

Def. Dominio euclidiano. D es un dominio euclidiano si es anillo conmutativo sin divisores de 0 y con una función $N : D \longrightarrow \mathbb{N}$:

(i) $N(0) = 0$; $N(z) > 0$ $z \neq 0$

(ii) Si $z, w, q \in D - \{0\}$ y $z = wq \Rightarrow N(z) \geq N(w)$

(iii) $\forall z, w \in D$ $w \neq 0 \Rightarrow \exists\, p$ y $r \in \mathbb{Z}[i]$: $z = wp + r$ con $r = 0$ ó $N(r) < N(w)$

o

Probar que todo ideal de D es principal. Pista: imitar la prueba en $\mathbb{Z}$.

Probar que en $\mathbb{Z}[i]$ el mapa $N(a+bi) = a^2 + b^2$ sirve como N.

Como se extienden los ideales primos de $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z}[i]$

* $(2) = (1+i)^2$ con $(1+i)$ ideal primo de $\mathbb{Z}[i]$
* Si $p \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow (p)^e = \mathfrak{p}_1 \cdot \mathfrak{p}_2$ $\mathfrak{p}_1$ y $\mathfrak{p}_2$ ideales primos en $\mathbb{Z}[i]$ (e.g. $(5)^e = (2+i)(2-i)$)
* Si $p \equiv 3 \pmod 4 \Rightarrow (p)^e =$ ideal primo en $\mathbb{Z}[i]$.

Si $\mathfrak{m} \subset A$ $\mathfrak{m} \in \mathrm{MSpec}(A)$ y $f: A \to B$ $\mathfrak{m}^e$ no es nec. maximal en B

$\mathfrak{m} \subset B$ $\mathfrak{m} \in \mathrm{MSpec}(B)$ y $\mathfrak{m}^c$ no es nec. maximal en A.

$\mathfrak{p} \subset A$ $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$ $\mathfrak{p}^e$ no es primo

$\mathfrak{q} \subset B$ $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$ $\mathfrak{q}^c$ es primo.