Clase 18 2023/11/03

Comportamiento de ideales por morfismos para anillos conmutativos.

Def $\mathcal{I}(A) \supset \mathrm{Spect}(A) \supset \mathrm{MSpect}(A)$ es el conjunto de los ideales de A $\mathcal{I}(A)$, el conjunto de los ideales primos $\mathrm{Spect}(A)$, el conjunto de los ideales maximales $\mathrm{MSpect}(A)$.

Obs Dado $\underbrace{f: A \to B}_{f \text{ homomorfismo}}$ se definen dos funciones f^* y f_*

$$f: A \to B, \quad A' \subset A, \quad f(A') \subset B$$

$$\mathfrak{b} \subset B$$

$\boxed{\text{Si } f \text{ es sobre } f(\mathfrak{a}) \text{ es un ideal de } B \text{ sino...}}$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{I}(A) \arrow[r, bend left, "f^* = (\ )^e"] & \mathcal{I}(B) \arrow[l, bend left, "(\ )^c = f_*"] \end{tikzcd}$$

$\mathfrak{a} \in \mathcal{I}(A)$

$$\mathcal{I}(B) \ni f^*(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}^e = \langle f(\mathfrak{a}) \rangle = f(\mathfrak{a})B \subset B \qquad \mathfrak{a} \in \mathcal{I}(A)$$

$$\mathcal{I}(A) \ni f_*(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}^c = f^{-1}(\mathfrak{b}) \subset A \qquad \mathfrak{b} \in \mathcal{I}(B) \quad \mathfrak{b}^c = \underbrace{\{a \in A : f(a) \in \mathfrak{b}\}}_{\text{ideal}}$$

Ejercicio. Probar que $\mathfrak{a}$ ideal en $A \Rightarrow \mathfrak{a}^e$ ideal en B

$\mathfrak{b}$ " " $B \Rightarrow \mathfrak{b}^c$ ideal en A

Ejemplos a) $\mathbb{Z} \xhookrightarrow{f} \mathbb{Z}[x]$ la inclusión de los enteros en el anillo de polinomios de una variable y coeficientes en $\mathbb{Z}$.

$\to \mathcal{I}(\mathbb{Z}) = \{n\mathbb{Z} : n \in \mathbb{Z}\}$ $\quad (n\mathbb{Z})^e = (n\mathbb{Z})\mathbb{Z}[x] = \{f = \sum_{i=1}^{t} a_i x^i ; n | a_i\}$

$\mathfrak{a} \subset \mathbb{Z}[x] \quad \mathfrak{a}^c = \{m \in \mathbb{Z} : m \in \mathfrak{a}\} = \mathfrak{a} \cap \mathbb{Z}$

b) En próxima página.

Observación Si $f: A \to B$ podemos escribir $f: A \xrightarrow{p} C \xrightarrow{\iota} B$ donde p es sobre e ι es inyectiva.

Es fácil probar que en general dado una composición $A \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} B$

b) Se considera el mapa $inc: \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ que es un morfismo de anillos.

$\mathcal{I}(\mathbb{Z}) = \{\{0\}, \mathbb{Z}, n\mathbb{Z} \quad n = 2,3,4,\dots\}$

$\mathcal{I}(\mathbb{Q}) = \{\{0\}, \mathbb{Q}\}$

$$\begin{array}{c} \{\{0\}, \mathbb{Z}, n\mathbb{Z} \quad n=2,3,4,\dots\} \\ (\ )^e \downarrow \qquad \uparrow (\ )^c \\ \{\{0\}, \ \mathbb{Q}\} \end{array}$$

Consideremos los mapas $(\ )^e$, $(\ )^c$

Extensión

$\{0\}^e = 0\mathbb{Q} = \{0\}$

$\mathbb{Z}^e = \mathbb{Z}\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$

$(n\mathbb{Z})^e = n\mathbb{Z}\mathbb{Q} = n\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ (porque $\frac{1}{n} \in \mathbb{Q}$ luego $1 \in n\mathbb{Q}$

Contracción

$\{0\}^c = \{0\} \cap \mathbb{Z} = \{0\}$

$\mathbb{Q}^c = \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

Dada una composición de extensiones

$A \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} B$

$\cup$

$\mathfrak{a} \longrightarrow \mathfrak{a}^e = \mathfrak{a} \cdot C \longrightarrow (\mathfrak{a}^e)^e = \mathfrak{a}CB = \mathfrak{a}B = \mathfrak{a}^e$

donde esto se interpreta como la ext de la composición $\beta\alpha$

O sea $(\beta\alpha)^* = \beta^*\alpha^*$.

La composición de contracciones

$A \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} B$

$$\begin{array}{ccccc} & & & & \cup \\ \mathfrak{b}^{cc} & \longleftarrow & \mathfrak{b}^c & \longleftarrow & \mathfrak{b} \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \\ \alpha^{-1}(\beta^{-1}(\mathfrak{b})) & & \beta^{-1}(\mathfrak{b}) & & \\ = & & & & \\ (\beta\alpha)^{-1}(\mathfrak{b}) & & & & \end{array}$$

luego la composicion de contracciones se obtiene invirtiendo el orden de los mapas o sea

$(\beta\alpha)_* = \alpha_* \circ \beta_*$

FIN CLASE 18