

Clase 18 2023/11/03

Comportamiento de ideales por morfismos para anillos conmutativos.

Def  $\mathcal{I}(A) \supset \text{Spec}(A) \supset \text{MSpec}(A)$  es el conjunto de los ideales de  $A$ ,  $\mathcal{I}(A)$ , el conjunto de los ideales primos  $\text{Spec}(A)$ , el conjunto de los ideales maximales  $\text{MSpec}(A)$ .

*f* homomorfismo

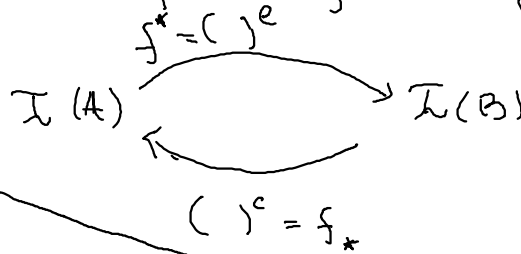
Obs Si  $f$  es sobre  $f(\mathfrak{a})$  es un ideal de  $B$  si y solo si...

Dado  $f: A \rightarrow B$  se definen dos funciones  $f^*$  y  $f_*$

$$f: A \rightarrow B$$

$$\cup \quad \cup$$

$$\mathfrak{a} \quad f(\mathfrak{a})$$



$$\mathfrak{b} \subset B$$

$$\mathcal{I}(B) \ni f^*(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}^e = \langle f(\mathfrak{a}) \rangle = f(\mathfrak{a})B \subset B \quad \mathfrak{a} \in \mathcal{I}(A)$$

$$\mathcal{I}(A) \ni f_*(\mathfrak{b}) = \mathfrak{b}^c = f^{-1}(\mathfrak{b}) \subset A \quad \mathfrak{b} \in \mathcal{I}(B) \quad \mathfrak{b}^c = \{a \in A : f(a) \in \mathfrak{b}\}$$

ideal

Ejercicio. Probar que  $\mathfrak{a}$  ideal en  $A \Rightarrow \mathfrak{a}^e$  ideal en  $B$   
 $\mathfrak{b}$  " "  $B \Rightarrow \mathfrak{b}^c$  ideal en  $A$

Ejemplos a)  $\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}[x]$  la inclusión de los enteros en el anillo de polinomios de una variable y coeficientes en  $\mathbb{Z}$ .

$$\rightarrow \mathcal{I}(\mathbb{Z}) = \{m\mathbb{Z} : m \in \mathbb{Z}\} \quad (m\mathbb{Z})^e = (m\mathbb{Z})\mathbb{Z}[x] = \left\{ f = \sum_{i=0}^t a_i x^i : m | a_i \right\}$$

$$\mathfrak{a} \subset \mathbb{Z}[x] \quad \mathfrak{a}^c = \{m \in \mathbb{Z} : m \in \mathfrak{a}\} = \mathfrak{a} \cap \mathbb{Z}$$

b) En próxima página.

Observación Si  $f: A \rightarrow B$  podemos escribir  $f: A \xrightarrow{p} C \xrightarrow{u} B$

donde  $p$  es sobre e  $u$  es inyectiva.

Es fácil probar que en general dado una composición  $A \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} B$

b) Se considera el mapa inc:  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$  que es un morfismo de anillos.  
 $\mathcal{I}(\mathbb{Z}) = \{ \{0\}, \mathbb{Z}, n\mathbb{Z} \mid n=2,3,4,\dots \}$

$$\mathcal{I}(\mathbb{Q}) = \{ \{0\}, \mathbb{Q} \}$$

$$\{ \{0\}, \mathbb{Z}, n\mathbb{Z} \mid n=2,3,4,\dots \}$$

Consideremos los mapas  $( )^e, ( )^c$

*Extensión*

$$\{0\}^e = 0\mathbb{Q} = \{0\}$$

$$\mathbb{Z}^e = \mathbb{Z}\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$$

$$(n\mathbb{Z})^e = n\mathbb{Z}\mathbb{Q} = n\mathbb{Q} = \mathbb{Q} \quad (\text{por que } \frac{1}{n} \in \mathbb{Q} \text{ luego } 1 \in n\mathbb{Q})$$

*Contracción*

$$\{0\}^c = \{0\} \cap \mathbb{Z} = \{0\}$$

$$\mathbb{Q}^c = \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

Dada una composición de extensiones

$$A \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} B$$

$$\cup \quad \sigma \longrightarrow \sigma^e = \sigma \cdot C \longrightarrow (\sigma^e)^e = \sigma C B = \sigma B = \sigma^e$$

$$\text{O sea } (\beta \alpha)^* = \beta^* \alpha^*$$

donde esto se interpreta

↓ como la ext de la composición

$\beta \alpha$

La composición de contracciones

$$A \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} B$$

$$\begin{array}{ccc} b^c & \longleftarrow & b^c \longleftarrow b^c \\ \text{"} & & \text{"} \\ \alpha^{-1}(\beta^{-1}(b)) & & \beta^{-1}(b) \\ = & & \\ (\beta \alpha)^{-1}(b) & & \end{array}$$

luego la composición de contracciones se obtiene invirtiendo el orden de los mapas o sea

$$(\beta \alpha)_* = \alpha_* \circ \beta_*$$

FIN CASE 18