Práctico 5. Ideales ideales primos localización

1 a) Los ideales de $A/_I$ (A conmutativo) son de la forma $J/_I$ donde J es un ideal de A que contiene a J.

b) $J/_I \subset A/_I$ es primo si y sólo si J es primo y es maximal si y sólo si J es maximal

– recordar que $A/_I$ es un dominio sii I es primo y es un cuerpo sii I es maximal.

2) Encontrar todos los ideales primos de $\mathbb{Z}_6 = \mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}}$ y todos los maximales de $\mathbb{Z}_{12}$

3) Sea A un anillo: $\forall a \in A \ \exists n : a^n = a$. Probar que todo ideal primo es maximal. Bastaría probar que si A es un dominio: $a^n = a \ \forall a \Rightarrow A$ es un cuerpo.

4) Se considera el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{10}] = \{a + b.\sqrt{10} : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

Describir explícitamente las operaciones.

Se considera el ideal $P = \langle 2, \sqrt{10} \rangle$ - ideal generado.

Probar que $P = \{a + b\sqrt{10} : a, b \in \mathbb{Z} \ \ 2 \mid a\}$

Concluir que P es un ideal primo.

5) Si A es un anillo y $\mathfrak{a} \subset A$ es un ideal de $A \Rightarrow S = 1 + \mathfrak{a}$ es un subconjunto multiplicativo.

Mostrar que $S^{-1}\mathfrak{a} \subset \mathrm{Jac}(S^{-1}A)$ el radical de Jacobson

6) Describir explícitamente $A_\mathfrak{p}$ donde $A = \mathbb{Z}$ $\mathfrak{p} = p\mathbb{Z}$ p primo en $\mathbb{Z}$ probando que $\mathbb{Z}_{p\mathbb{Z}} = \{\frac{m}{n} : p \nmid n\}$. Cuál es el ideal maximal de $\mathbb{Z}_{p\mathbb{Z}}$?