Clase 17. 27/10/2023

<u>Propiedad</u> Sea A un anillo conmutativo y $\mathcal{N}(A)=\{a\in A : \exists n : a^n=0\}$. Entonces $\mathcal{N}(A)=\bigcap_{\mathfrak{p}}\{\mathfrak{p}\subset A : \mathfrak{p}\in \operatorname{Spect}(A)\}$. En otras palabras el radical nilpotente es la intersección de todos los ideales primos.

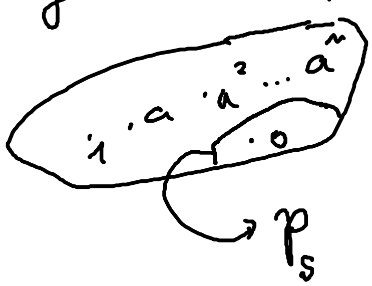
<u>Dem</u>

Ya sabemos que $\mathcal{N}(A)\subset \bigcap\{\mathfrak{p}\in \operatorname{Spect}(A)\}$.

Esto porque si $a\in\mathcal{N}(A) \Rightarrow a^n=0$ $\mathfrak{p}$
para algún n.

Si $a^n=0\in\mathfrak{p}$ (todo ideal contiene el 0) $\Rightarrow a^n\in\mathfrak{p}$
$\Rightarrow a\in\mathfrak{p}$; por ser $\mathfrak{p}$ un ideal primo. (inducción $a^{n-1}a\in\mathfrak{p}$ $\Rightarrow a^{n-1}\in\mathfrak{p}$, etc)

Si $a\in\bigcap_{\mathfrak{p}}\{\mathfrak{p}\in\operatorname{Spect}(A)\}$. Si $a^n\neq 0\ \forall n$, tomamos el conjunto multiplicativo $\{1,a,a^2,\dots,a^n,\dots\}= S$



Sea $\mathfrak{p}_S$ un ideal primo: $\mathfrak{p}_S\cap S=\emptyset$
luego $a\notin\mathfrak{p}_S$ absurdo. ∎

<u>Extensión y contracción de ideales</u>

A y B anillos conmutativos $f: A\to B$ morfismo de anillos. $f(1)=1$.

Definimos dado un anillo A conmutativo los conjuntos

$\operatorname{MSpec}(A)\subset \operatorname{Spect}(A)\subseteq \mathcal{I}(A)$.

$\mathrm{MSpect}(A) = \{ m \subseteq A,\ m \text{ ideal maximal} \}$
$\mathrm{Spect}(A) = \{ p \subseteq A,\ p \text{ ideal primo} \}$
$I(A) = \{ \mathfrak{a} \subset A : \mathfrak{a} \text{ ideal } A \}$.

Si $f: A \to B$ se define $b \subset B$ $b \in I(b)$ se toma el subconjunto de A $f^{-1}(b) = \{ a \in A : f(a) \in b \}$.

Se denota $f^{-1}(b) = b^c$ ideal contraído.

Es claro que b^c es un ideal $a \in A$ $a' \in b^c \Rightarrow f(aa') = f(a) f(a')$ y como $a' \in b^c$ $f(a') \in b \Rightarrow f(aa') = f(a) f(a') \in B b = b$

Lo mismo si $a, a' \in b^c$ $a + a' \in b^c$ $f(a+a') = f(a) + f(a') \in b + b = b$.

$$b \longrightarrow b^c = f^{-1}(b)$$

Hemos definido el mapa $I(B) \longrightarrow I(A)$

queremos considerar la restricción

$$\begin{array}{ccc} I(B) & \longrightarrow & I(A) \\ \cup & & \cup \\ \mathrm{Spect}(B) & \longrightarrow & \mathrm{Spect}(A) \\ \cup & & \cup \\ \mathrm{MSpect}(B) & \longrightarrow & \mathrm{MSpect}(A) \end{array}$$

Propiedad $p \in \mathrm{Spect}(B)$ $f^{-1}(p) = \{ a \in A : f(a) \in p \}$ es un ideal primo. Sean $a, a' \in f^{-1}(p)$

Hip $a, a' \in A$ y $aa' \in f^{-1}(p)$ $\quad$ (T) queremos probar que a ó $a' \in f^{-1}(p)$

$$f(aa') \in p \Rightarrow f(a) f(a') \in p \Rightarrow \begin{array}{c} f(a) \in p \\ \text{ó} \\ f(a') \in p \end{array} \text{ pues } p \text{ es primo.}$$

$\Rightarrow a \in f^{-1}(p)$
ó
$a' \in f^{-1}(p)$

Contraejemplo Si $M \subset B$ es maximal $\Rightarrow f^{-1}(M) \subset A$ no es maximal

$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} = \{0\} = M$ es maximal en $\mathbb{Q}$

pero $M \cap \mathbb{Z} = \{0\} \subset \mathbb{Z}$ no es maximal p.e. $0 \subsetneq 2\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Z}$