Clase 26/10/23   Clase 16

Ideales primos y conjuntos multiplicativos

Def^n $\mathrm{Spec}(A) = \{ p : p \subset A \text{ primo e ideal} \}$ p primo $\iff \forall x,y \in A : xy \in p \Rightarrow \begin{cases} x \in p \\ \text{ó} \\ y \in p \end{cases}$

$\mathrm{Mult}(A) = \{ S \subset A : S \text{ conjunto multiplicativo} \}$. S mult $\iff 1 \in S$ y $s_1, s_2 \in S \to s_1 s_2 \in S$

Existe una función $\mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Mult}(A)$ $p \to p^c = A \setminus p$

Eso ya lo vimos. Esa función es inyectiva. Si $p^c = q^c \Rightarrow p^{cc} = p = q^{cc} = q$

$\Rightarrow p = q$.

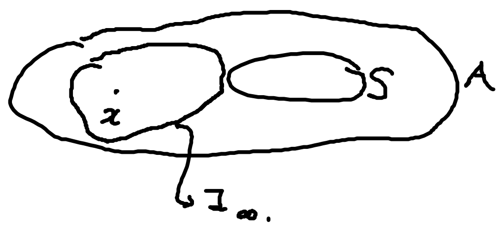
Obs No vale el recíproco, vale que si S es multiplicativo y S^c = ideal $\Rightarrow S^c$ es primo.

Dem $x,y \in A$ $xy \in S^c \Rightarrow x \in S^c$ ó $y \in S^c$ pues si $x \notin S^c$ e $y \notin S^c \Rightarrow x \in S$ e $y \in S$ $\Rightarrow xy \in S$ ↯

El problema en general es que S^c no es ideal p.e. si fuera ideal $S \subset A$ $f \in A$ y $S = \{1, f, \dots, f^n, \dots\}$ estamos diciendo que si $a \neq f^n \ \forall n \Rightarrow \forall b \in A$ $ba \neq f^n \ \forall n$ y eso es falso. P.e. en $\mathbb{Z}$ $f = 6$ $2 \neq 6^n \ \forall n$ pero $3 \cdot 2 = 6 = 6^1$

Teorema (importante) Sea S un conjunto multiplicativo y $x \notin S$, $I_\infty = \max\{x \in I \subset A : I \cap S = \emptyset\}$

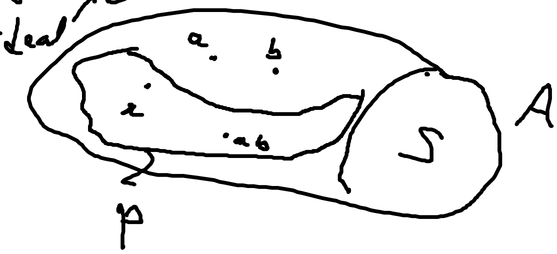
$\Rightarrow x \in I_\infty$ es un ideal primo.



Dem Un ideal maximal en el conjunto $\{ I \subset A : I \text{ ideal}, x \in I, I \cap S = \emptyset \}$ existe por el lema de Zorn. Sea p el ideal.

Sean $a, b \in A$: $ab \in p$.

Queremos probar que $a \in p$ ó $b \in p$



Supongamos que $a \notin p$ y $b \notin p \Rightarrow$ $p \subsetneq \langle p, a \rangle$ $p \subsetneq \langle p, b \rangle$

Luego $\langle \mathfrak{p}, a\rangle \cap S \neq \emptyset \quad \langle \mathfrak{p}, b\rangle \cap S \neq \emptyset$.

$\langle \mathfrak{p}, a\rangle \cap S \neq \emptyset$

$$\langle \mathfrak{p}, a\rangle = \mathfrak{p} + \langle a\rangle = \{ p + ta : p \in \mathfrak{p},\ t \in A \}$$

Luego existen $s_1, s_2 \in S$: $\quad p_1 + ta = s_1 \quad p_1 \in \mathfrak{p} \quad t, r \in A$

$\quad p_2 + rb = s_2 \quad p_2 \in \mathfrak{p}$.

$$* \Rightarrow s_1 s_2 = \underset{\mathfrak{p}}{p_1 p_2} + \underset{\mathfrak{p}}{p_1 rb} + \underset{\mathfrak{p}}{p_2 ta} + \underset{\mathfrak{p}}{trab} \Longrightarrow s_1 s_2 \in \mathfrak{p}$$

$s_1 s_2 \in S \quad \lightning$

Aplicación al radical nilpotente.

$(f \circ v), (g \circ v') \longrightarrow ?$