Clase 15 2023-10-13

A anillo conmutativo fijo.

Localización e ideales primos

Lema

- Sea S un conjunto multiplicativo y $K=\{I\subset A : I$ es un ideal $: I\cap S=\emptyset\}$. Existe un elemento maximal $I_\infty\in K$. Además I_∞ es un ideal primo.

- Localización de A-módulos siendo $S\subset A$ un conjunto multiplicativo.

$M\in {}_A\mathcal{M}$ $\quad S\subset A \quad M\times S=\{(m,s) : m\in M\ s\in S\}$

$(m,s)\sim(n,t)$ si por def $\exists r\in S : r(t.m-sn)=0$

$[(m,s)]=\frac{m}{s} \qquad M_S=\{\frac{m}{s} : m\in M\ s\in S\}=S^{-1}M$

$M_S\in {}_A\mathcal{M} \quad a\in A \quad \frac{m}{s}\in M_S$

$a\cdot\frac{m}{s}=\frac{am}{s} \qquad m\in M \quad a.m\in M \quad a\in A.$

$S\subset A \quad A\times S$
$A\times S=\{(a,s) : a\in A,\ s\in S\}$
$(a,s)\sim(b,t)$
$\exists r : .$
$r(at-bs)=0$
$r(ta-sb)=0$
$S^{-1}A=A_S$

$\boxed{\frac{m}{s}=\frac{n}{t}}$ $m,n\in M, s,t\in S$ y $\exists r\in S : r.(t.m-s.n)=0$

$\Downarrow$

$\frac{a.m}{s}=\frac{an}{t} \quad \exists\, l\in S : \quad l(tam-san)=0$

$r(tam-san)=0$
$\quad\shortparallel$
$r(atm-asn)=0$
$\quad\shortparallel$
$ar(tm-sn)=0$

A_S

$\frac{m}{s}+\frac{n}{t}=\frac{tm+sn}{st}$

Ej: Podemos actuar $M_S\in {}_A\mathcal{M}$ se pueda actuar con A.

$(m,s)\sim(m',s') \quad (n,t)\sim(n',t')$

$\Rightarrow (tm+sn,st)\sim(t'm'+s'n',s't')$

A anillo $S \subset A$ multiplicativo $\quad M \in {}_A\mathcal{M}$ my $M_S \in {}_A\mathcal{M}$

Si $f: M \to N$ es un morfismo de A-modulos el dato $f_S\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{f(m)}{s}$

$f_S : M_S \to N_S$ es un morfismo de A-modulos

Para probar que la def de f_S es correcta necesitamos probar que

en M_S $\quad \frac{m}{s} \sim \frac{n}{t} \Rightarrow \frac{f(m)}{s} \sim \frac{f(n)}{t}$ en N_S $\qquad M \xrightarrow{f} N$, $\quad M_S \xrightarrow{f_S} N_S$

$\exists r \in S : \; r(tm - sn) = 0 \Rightarrow \exists r' : \; r'\left(t f(m) - s f(n)\right) = 0$

$0 = f(0) = f\left(r(tm - sn)\right) = r f(tm - sn) = r\left(f(tm) - f(sn)\right)$

$\to r\left(t f(m) - s f(n)\right)$

$f: M \to N$ A-mod $\quad f_S : M_S \to N_S$ morfism de A-modulos

---//---

1. $\mathfrak{p}$ es un ideal primo $\quad A \setminus \mathfrak{p} = S_\mathfrak{p}$ es un conjunto multiplicativo.

[A_S y M_S $\qquad S^{-1}A$, $S^{-1}M$ nueva notación

S cual quiera]

Cambio de notación.

Cuando escribíamos A_S eran de la form $\frac{a}{s}$ $s \in S$

cuando escribimos son elementos de la form $\frac{a}{s}$ con $s \notin \mathfrak{p}$ $\qquad S_\mathfrak{p}^{-1}A = A_\mathfrak{p}$

* $S^{-1}A$ y en el caso que $S_\mathfrak{p} = A \setminus \mathfrak{p}$ usan $S_\mathfrak{p}^{-1}A$ en vez de $= A_\mathfrak{p}$.

$$\boxed{A_\mathfrak{p} = \left\{ \frac{a}{s} : s \notin \mathfrak{p} \right\} \qquad S^{-1}A = \left\{ \frac{a}{s} : s \in S \right\}}$$

A_p A anillo cualquier $\mathfrak{p} \subset A$ ideal primo.

El anillo A_p es un anillo local. Krull (padre del álgebra conmutativa 18xx xx ≤ 50 Krull, Hilbert y Emmy Noether.

<u>Dfn</u> R anillo conmutativo es un anillo local si tiene un solo ideal maximal. $\mathbb{Z}$ no son un anillo local ; $p\mathbb{Z}$ es un ideal maximal $\forall p$ primo

$\mathbb{Q}$ son un anillo local pues no tiene ideales propios $(\neq \mathbb{Q})$ salvo el (0)

$(0) \subsetneq I \subseteq k$

$\underset{I}{a} \neq 0 \Rightarrow \exists a^{-1} \in I \qquad a a^{-1} = 1 \in I \Rightarrow$ ideal es k $\Big\}$ El único $\underbrace{\text{ideal}}$ es el cero es maximal

A es un anillo local le llamamos m_A al único ideal maximal.

A y $\mathfrak{p}$ ideal primo $A_{\mathfrak{p}}$ es local y su ideal maximal es $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$
$= \{ p/s : p \in \mathfrak{p} \; s \notin \mathfrak{p} \}$ $\qquad \mathfrak{p} \subset A \rightsquigarrow \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ ideal ~~en A_p~~ maximal