

Localización. Clase teórica

Anillos conmutativos y cocientes

$I \subset A$ anillo e ideal cualquier. Se define $A/I = \{[a] : a \in A\}$

$[a] = a + I$ i.e. $[a] = \{b \in A : b \sim a\}$, Donde $b \sim a \iff b - a \in I$
 $\iff \exists i \in I, b \in \{a + i : i \in I\}$.

$\pi : A \rightarrow A/I \quad \pi(a) = [a]$

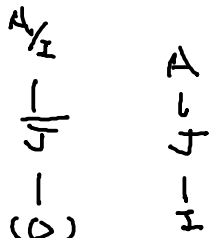
Obs Existe una correspondencia biyectiva entre ideales de A que contienen a I e ideales de A/I

$A \xrightarrow{\pi} A/I$

$a \mapsto [a] = \pi(a)$

π homomorfismo de anillos $\rightarrow \forall k \in \pi^{-1}(0) = I$

Si $I \cap J \subset A \quad \pi(I) = (0) \subset \pi(J) \subset A \quad \pi(J) = \bar{J} \cong J/I$

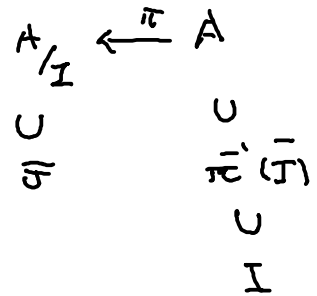


Def $I \subset A$ un ideal cualquier $\mathcal{J}(A, I) = \{J \text{ ideales de } A : I \subset J \subset A\}$

$\mathcal{J}(A, 0) = \{J \text{ ideales de } A\}$ simplemente $\mathcal{J}(A)$.

$\mathcal{J}(A, I) \cong \mathcal{J}(A/I)$

$A \cup J \xrightarrow{\pi} A/I \cup \pi(J) \cong J/I$



$J \xrightarrow{\pi} \pi(J)$

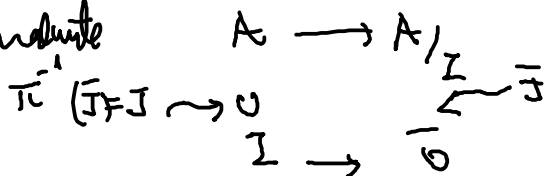
$\mathcal{J}(A, I) \rightarrow \mathcal{J}(A/I)$

$\pi^{-1}(\bar{J}) \xleftarrow{\cup} \bar{J}$

Obs $\pi^{-1}(\bar{J}) \supset I$ porque $\pi^{-1}(0) = I$ y $0 \in \bar{J} \implies$

$\pi^{-1}(0) = I \subset \pi^{-1}(\bar{J})$

Conceptualmente



A anillo $U(A)$ $\exists v \in U(A)$ $\exists n \in A : uv = vu = 1$
 cualquier

$U(A) \subset A$ $U(A) = A^* = \{a \in A : a \neq 0\}$ anillo conmutativo
 es un cuerpo. Cambiando de anillos se logra que algunos elementos queden invertibles

$a \in A \subset \tilde{A} : a$ invertible en \tilde{A}

$A = \mathbb{Z}$ $U(\mathbb{Z}) = \{1, -1\}$ $a \in \mathbb{Z}$

$\tilde{A} = \mathbb{Q}_a = \left\{ \frac{m}{a^n} : m \in \mathbb{Z} \ n \in \mathbb{N} \right\}$

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}_a$
 $\psi \quad \psi$
 $\dots a \dots a_1$

$a=3$
 $\frac{1}{3} \ \frac{15}{3} \ \frac{1}{9} \dots$
 $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}_a$
 $m \rightarrow \frac{m}{a^n}$
 $\frac{a}{1} \ \frac{1}{a} = 1$ invertible

Más en general $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$, se obtiene que todos los de \mathbb{Z}^* dan invertibles

En el caso de anillos conmutativos

\rightarrow
 One

Se puede localizar en ciertas condiciones. Gauss etc
 Para anillos conmutativos solo se lo puede

$[a] + [b] = [a+b]$ $a \sim a$ $b \sim b$ $a + b \sim a + b$ etc
 $[ab] = [a][b]$ $a' b' \sim ab$

$$J \longrightarrow \pi(J)$$

En particular $J(A, I) \longrightarrow J(A/I) \longrightarrow$ ideales maximales

$$\begin{array}{ccc} & \longleftarrow & \\ \text{ideales} & \pi^{-1}(\bar{J}) & \longleftarrow \bar{J} \\ \text{maximales de } A & & \end{array}$$

que contiene a I

Obs ha correspondencia biyectiva entre $J(A, I)$ y $J(A/I)$ preserve la maximalidad.

Es porque preserve el orden $I \subset J \subset J' \subset A$

$$\begin{array}{ccc} J \subset J' & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi(J) & & \pi(J') \end{array}$$

$$(0) \subset \bar{J} \subset \bar{J}' \subset A/I$$

Importancia de los ideales maximales.

Ideales maximales de $C[x]$. $I \subset C[x]$. $\langle p \rangle \subset C[x]$

$\langle p \rangle \subset \langle q \rangle \iff q \mid p$ ($\exists f \in M \subset C[x]$ no hay ningun divisor entre de q salvo q . q no tiene divisores $\implies q =$ polinomio de grado 1.

Ejem. M ideal maximal de $C[x]$ $M = \langle ax+b \rangle = \langle x-\alpha \rangle$

$\{M\}$ ideales max de $C[x]$ y C

$$C \xrightarrow{\cong} \text{Max}(C[x])$$

$$\alpha \longrightarrow \langle x-\alpha \rangle \quad \forall \alpha \in C$$

Teorema a) Un anillo conmutativo sin ideales salvo (0) es un cuerpo y viceversa.

b) En A anillo cualquier conmutativo $M \subset A$ un ideal es maximal sin A/M es un cuerpo.

Dem a) \iff b) $J(A, M) \cong J(A/M)$

$$\begin{array}{ccc} \{M\} & & \{0\} \end{array}$$

$\hookrightarrow J(A, M)$ para M maximal $\iff A/M$ tiene solo (0) como ideal maximal

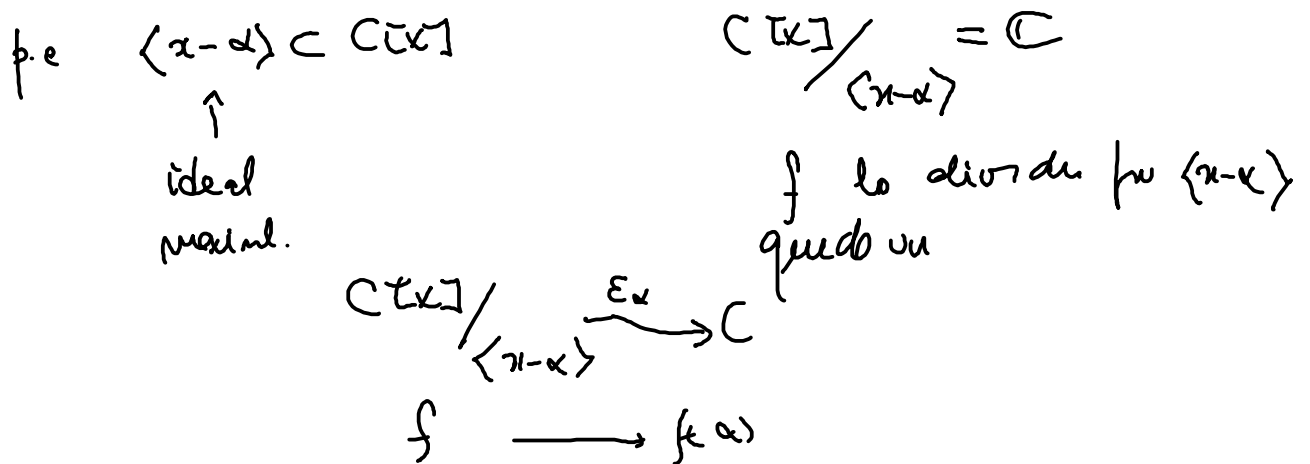
① A no tiene ideales $\neq A$ salvo $(0) \iff A$ es un cuerpo

$\left[\begin{array}{l} A \text{ un corp } a \in A, a \neq 0 \text{ es invertible} \Rightarrow \text{no puede} \\ \text{tener ideales propios } I \ni a, a \neq 0 \Rightarrow A \text{ no puede tener} \\ \text{ideales maximales} \end{array} \right.$

Recíproco si A no tiene ideales maximales $\exists x \neq 0, x \in A$
 $\langle x \rangle \subsetneq A \Rightarrow$ no es maximal $(\langle x \rangle = A)$
 $\#$
 A
 $1 = xy \Rightarrow 1 \in \langle x \rangle$

② $\text{Max}(A/I) = \text{Max}(A, I)$

Construye los ideales maximales a través de un cociente



Ideales maximales la existencia etc, su relación con los cuerpos

Anillos \supseteq Dominios \supseteq Cuerpos

$\{0\} \subseteq U(A)$ $k \setminus \{0\} = U(k)$ $\left[\begin{array}{l} M_n(k) \\ \det(X) \neq 0 \\ U(M_n(k)) \end{array} \right.$

Dominio o dominio de integridad \longleftrightarrow divisores de cero en un anillo.

Anillo $(A, +, \cdot)$ con propiedades algebraicas

Domínio $(A, +, \cdot)$ no tiene divisores de cero.

Cuerpo $(A, +, \cdot)$ $A^* = A - \{0\}$ sean invertibles luego

Divisor de cero en un anillo conmutativo. (A^*, \cdot) es un grupo. Si es conmutativo es un cuerpo

On $x \mid y \Leftrightarrow \exists z : xz = y$ ← Divisibilidad en general
 $x \mid 0 \Leftrightarrow \exists z \neq 0 : xz = 0$ ← Divisibilidad de cero

Domínio $xy = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

$(A, +, \cdot)$ conmutativo
Elemento invertible $U(A)$ ←
Elemento nilpotente $Nil(A)$ ←
divisores de cero $D(A)$ ←

$Nil(A) \subset D(A)$.

Defn Un ideal PCA se dice ideal primo si
 $xy \in P \Leftrightarrow x \in P \text{ ó } y \in P$

$xy \in P \wedge x \notin P \rightarrow y \in P$

Ideales maximales
Ideales primos.

M maximal $\Rightarrow M$ primo.

Proposición

ideal cualquier $I \subset A$ $x \in I$ $z \in A \Rightarrow xz \in I$

ideal primo $P \subset A$ $x \in P$ ó $y \in P \Leftrightarrow xz \in P$

en \mathbb{Z} todo ideal es principal

$P = \langle p \rangle$

$xz \in \langle p \rangle \Leftrightarrow p \mid xz$

$p \mid z \text{ ó } p \mid x$

← $p \mid xz$

En la próxima clase veremos ideales primos y localización.

Repertorio práctico 4

Ej 1 X conjunto $\mathcal{P}(X)$ = conjunto de los subconjuntos de X .

(A) $\mathcal{P}(X)$ con operaciones $A+B = A \cup B$; $A \cdot B = A \cap B$ es un anillo.

Oby no consideren anillos sin identidad.

Def Un anillo: no incluye el axioma $\exists 1: r \cdot 1 = 1 \cdot r = r \quad \forall r \in R$
es un anillo sin identidad.

En (1), $0 \in \mathcal{P}(X)$ es tal que $\forall A, A \cup 0 = 0 \cup A = A \quad \forall A \Rightarrow 0 = \emptyset$
conjunto vacío.

El axioma $\forall A \exists -A: A \cup (-A) = \emptyset$ no se puede cumplir $\forall A$ pues
implica $A = \emptyset$

Luego no es un anillo.

(B) con operaciones $A+B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ $A \cdot B = A \cap B$

Se puede tomar $0 = \emptyset$ pues $A + \emptyset = A \cap X \cup A^c \cap \emptyset = A$.

$A + A = (A \cap A^c) \cup (A^c \cap A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$. Luego $-A = A$

es trivialmente por cierta la prop distributiva y las otras

(3) Se considera el anillo $M_2(\mathbb{R})$ y el subconjunto

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Se pregunta si es un subanillo. Es un subanillo pero sin identidad