Localización. Clase teórica

Anillos conmutativos y cocientes

$I \subset A$ anillo e ideal cualquiera. Se define $A/_I = \{[a] : a \in A\}$

$[a] = a+I$ ie $[a] = \{b \in A : b \sim a\}$ Donde $b \sim a \leftrightarrow b-a \in I$

$\leftrightarrow b \in a+I,\ b \in \{a+i : i \in I\}$.

$\pi : A \to A/_I \quad \pi(a) = [a]$.

Obs Existe una correspondencia biyectiva entre ideales de A que contienen a I e ideales de $A/_I$

$$\begin{array}{ccc} A/_I & & A \\ | & & | \\ \bar{J} & & J \\ | & & | \\ (0) & & I \end{array}$$

$A \xrightarrow{\pi} A/_I$ $\qquad \pi$ homomorfismo de anillos y $\mathrm{Ker}\,\pi = I$

$a \to [a] = \pi(a)$

Si $I \subset J \subset A \qquad \pi(I) = (0) \subset \pi(J) \subset A \qquad \pi(J) = \bar{J} \cong J/_I$

Def $I \subset A$ un ideal cualquiera $\mathcal{J}(A,I) = \{J \text{ ideales de } A : I \subset J \subset A\}$

$\mathcal{J}(A,0) = \{J \text{ ideales de } A\}$ simplemente $\mathcal{J}(A)$.

$\mathcal{J}(A,I) \cong \mathcal{J}(A/_I)$

$$\begin{array}{ccc} A & & A/_I \\ \cup & & \cup \\ J & \rightsquigarrow & \pi(J) \cong J/_I \\ | & & \\ I & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} A/_I & \xleftarrow{\pi} & A \\ \cup & & \cup \\ \bar{J} & & \pi^{-1}(\bar{J}) \\ & & \cup \\ & & I \end{array}$$

$J \longrightarrow \pi(J)$

$\mathcal{J}(A,I) \longrightarrow \mathcal{J}(A/_I)$

$$\begin{array}{ccc} & & \cup \\ \pi^{-1}(\bar{J}) & \longleftarrow & \bar{J} \end{array}$$

Obs $\pi^{-1}(\bar{J}) \supset I$ porque $\pi^{-1}(0) = I$ y $0 \in \bar{J} \Rightarrow$

$\pi^{-1}(0) = I \subset \pi^{-1}(\bar{J})$

Conceptualmente $A \longrightarrow A/_I$

$\pi^{-1}(\bar{J}) = J \rightsquigarrow \cup \qquad \leftarrow \bar{J}$

$I \longrightarrow \bar{0}$

A anillo $u \in U(A)$ $\quad \exists\, v \in A : \quad uv = vu = 1$

cualquiera

$U(A) \subset A \qquad U(A) = A^* = \{a \in A : a \neq 0\}$ anillo conmutativo es un cuerpo. Cambiando de anillos se logra que algunos elementos queden invertible

$a \in A \subset \tilde{A}$: a es invertible en $\tilde{A}$

$A = \mathbb{Z} \qquad U(\mathbb{Z}) = \{1, -1\} \qquad a \in \mathbb{Z}$

$a = 3$

$\frac{1}{3} \quad {}^{15}/_{3} \quad \frac{1}{9}, \dots$

$\cap$

$\tilde{A} = \mathbb{Q}_a = \{ \frac{m}{a^n} : \quad m \in \mathbb{Z} \quad n \in \mathbb{N} \}$

$\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}_a$

$m \mapsto {}^{m}/_{1}$

$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}_a$

$\cap$

$\mathbb{Q}$

$\dots a \dots \qquad a/_1$

$\boxed{\frac{a}{1}\,\frac{1}{a} = 1}$ es invertible

Mas en general $\mathbb{Z} \leadsto \mathbb{Q}$, se obtiene que todos los de $\mathbb{Z}^*$ son invertibles

En el caso de anillos conmutativos $\rightarrow$ Se puede Localizar en ciertas condiciones. Gauss etc. Para anillos conmutativos solo uno lo expande

Ore

$[a] + [b] = [a+b] \qquad a' \sim a \quad b' \sim b \qquad a' + b' \sim a + b$ etc

$[ab] = [a][b] \qquad\qquad a'b' \sim ab$

$J \longrightarrow \pi(J)$

En particular $\mathcal{J}(A, I) \longrightarrow \mathcal{J}(A/_I)$ $\longrightarrow$ ideales maximales

ideales maximales de A que contienen a I $\quad \pi^{-1}(\bar{J}) \longleftarrow \bar{J}$

<u>Obs</u> La correspondencia biyectiva entre $\mathcal{J}(A, I)$ y $\mathcal{J}(A/_I)$ preserva la maximalidad.

Eso porque preserva el orden $\quad I \subset J \subset J' \subset A \qquad J \subset J'$

$$(0) \subset \bar{J} \subset \bar{J}' \subset A/_I \qquad \pi(J) \quad \pi(J')$$

Importancia de los ideales maximales.

Ideales maximales de $\mathbb{C}[x]$. $I \subset \mathbb{C}[x]$. $\langle p \rangle \subset \mathbb{C}[x]$

$\langle p \rangle \subset \langle q \rangle \longleftrightarrow q \mid p$ $\langle q \rangle = M \subset \mathbb{C}[x]$ no hay ningún divisor entre de q salvo q. q no tiene divisores $\Rightarrow q =$ polinomio de grado 1. M ideal maximal de $\mathbb{C}[x]$ $M = \langle aX+b \rangle = \langle x - \alpha \rangle$

M ideales max de $\mathbb{C}[x]$ y $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\approx} \operatorname{Max}(\mathbb{C}[x])$$

$$\alpha \longrightarrow \langle x - \alpha \rangle \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

<u>Teorema</u> a) Un anillo conmutativo sin ideales salvo (0) es un cuerpo y viceversa.

b) En A anillo cualquiera conmutativo $M \subset A$ un ideal es maximal sii $A/_M$ es un cuerpo.

<u>Dem</u> a) $\longleftrightarrow$ b) $\quad \mathcal{J}(A, M) \cong \mathcal{J}(A/_M)$.

$$\{M\} \qquad \{0\}$$

Los $\mathcal{J}(A, M)$ para M maximal $\Longleftrightarrow$ $A/_M$ tiene solo (0) como ideal maximal

① A no tiene ideales $\neq A$ salvo (0) $\Leftrightarrow$ A es un cuerpo

[A es un cuerpo $a \in A$ $a \neq 0$ es invertible. $\Rightarrow$ no puede tener ideales propios $I \ni a$ $a \neq 0$ $\Rightarrow$ A no puede tener ideales maximales.

Recíproco si A no tiene ideales maximales y $x \neq 0$ $x \in A$

$\langle x \rangle \subset M \subset A$ $\Rightarrow$ x es invertible $\left(\langle x \rangle = A \right.$ $\left. 1 = xy \Rightarrow \text{inv} \right)$

$\neq$
A

② $\mathrm{Max}(A/I) = \mathrm{Max}(A, I)$

Caracterizar los ideales maximales a través de un cociente

p.e $\langle x - \alpha \rangle \subset \mathbb{C}[x]$ $\quad$ $\mathbb{C}[x]/\langle x-\alpha \rangle = \mathbb{C}$

ideal maximal.

f lo divido por $\langle x - \alpha \rangle$ quedo un

$$\mathbb{C}[x]/\langle x-\alpha \rangle \xrightarrow{\varepsilon_\alpha} \mathbb{C}$$
$$f \longrightarrow f(\alpha)$$

Ideales maximales la existencia etc, su relación con los cuerpos

Anillos (conmutativos) $\supseteq$ Dominios $\supseteq$ Cuerpos $\quad$ $\left[\begin{array}{l} M_n(\mathbb{R}) \\ \det(X) \neq 0 \end{array} \right.$

$+, \cdot$ $\quad$ $U(M_n(\mathbb{R}))$

$1 \in U(A)$ $\quad$ $k - \{0\} = U(k)$

Dominio o dominio de integridad $\longleftrightarrow$ divisores de cero en un anillo.

Anillo $(A,+,\cdot)$ con propiedades algebraicas

Dominio $(A,+,\cdot)$ no tengo divisores de cero.

Cuerpo $(A,+,\cdot)$ $A^* = A - \{0\}$ sean invertibles luego $(A^*,\cdot)$ es un grupo. Si es conmutativo es un cuerpo

$\boxed{\text{Divisor de cero}}$ en un anillo conmutativo.

Un $x \mid y$ si $\exists z$: $xz = y$ ← Divisibilidad en general

$x \mid 0$ $\exists z \neq 0 : xz = 0$ ← Divisibilidad de cero

<u>Dominio</u> $xy = 0 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x = 0 \\ \text{ó} \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$

$(A,+,\cdot)$ conmutativo

→ Elemento invertible $U(A)$ ←

→ Elemento nilpotente $Nil(A)$ ←

→ divisores de cero $D(A)$ ←

$Nil(A) \subset D(A)$.

<u>Defn</u> Un ideal $P \subset A$ se dice ideal primo si

$xy \in P \leftrightarrow x \in P$ ó $y \in P$

$\boxed{xy \in P \wedge x \notin P \rightarrow y \in P}$

Ideales maximales | $\boxed{M \text{ maximal} \Rightarrow M \text{ primo.}}$ <u>Próxima vez</u>

Ideales primos.

ideal cualquiera $I \subset A$ $x \in I$ $z \in A$ $\Rightarrow xz \in I$

ideal primo $P \subset A$ $x \in P$ ó $y \in P$ $\Leftarrow xz \in P$

en $\mathbb{Z}$ todo ideal es principal $P = \langle p \rangle$ $\}$ $xz \in \langle p \rangle$ $p \mid xz$

$p \mid z$ ó $p \mid x$ ← $p \mid xz$

En la próxima clase veremos ideales primos y localización.

Repartido práctico 4

Ej 1 X conjunto $\mathcal{P}(X)$ = conjunto de los subconjuntos de X.

A) $\mathcal{P}(X)$ con operaciones $A+B = A\cup B$; $A.B = A\cap B$ es un anillo.

Obs se consideran anillos sin identidad.

Def Un anillo: no incluye el axioma $\exists 1$: $r.1 = 1.r = r$ $\forall r \in R$ es un anillo sin identidad.

En ej 1, $0 \in \mathcal{P}(X)$ es tal que $\forall A$, $A\cup 0 = 0 \cup A = A$ $\forall A \Rightarrow 0 = \phi$ conjunto vacío.

El axioma $\forall A \; \exists -A$: $A\cup(-A) = \phi$ no se puede cumplir $\forall A$ pues implica $A = 0$

Luego no es un anillo.

B) con operaciones $A+B = (A\cap B^c)\cup(A^c\cap B)$ $A.B = A\cap B$

Se puede tomar $0 = \phi$ pues $A+\phi = A\cap X \cup A^c\cap\phi = A$.

$A+A = (A\cap A^c)\cup(A^c\cap A) = \phi\cup\phi = \phi$. Luego $-A = A$

es trabajoso pero cierta la prop distributiva y las otras

3) Se considera el anillo $M_2(R)$ y el subconjunto

$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} : a,b \in R \right\}$

Se pregunta si es un subanillo. Es un subanillo pero sin identidad