Clase 13 del 6 de Octubre de 2023

Ideales primos y localización

$P\subset A$ ideal, se dice que P es un ideal primo si $a,b\in A$: $ab\in P \Rightarrow$
a ó $b \in P$.

Obs P es un ideal primo $\Rightarrow A\setminus P=\{a\in A: a\notin P\}$ es un conjunto multiplicativo.

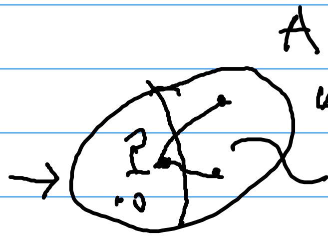
Def A anillo $S\subset A$ subconjunto arbitrario se dice multiplicativo si $s_1,s_2\in S \Rightarrow s_1s_2\in S$ (o sea es cerrado con respecto al producto) y $1\in S$

$ab\in P \Rightarrow a\in P$ ó $b\in P$

$ab\notin P \Leftarrow a\notin P$ y $b\notin P$

// Si $I<A$ es un ideal, entonces I es primo $\Leftrightarrow$ (si) $A\setminus I$ es multiplicativo

Ejemplos típicos
- $A\setminus P$ con P ideal primo
- $a\in A$ el $S_a=\{1,a,a^2,\dots,a^n,\dots\}$ es multiplicativo (como ejemplo de tipo diferente)



$A\setminus P = S$ $\quad s_1,s_2\in S \rightarrow s_1s_2\in S$ $(s_1s_2\notin P)$

$x,y\in A$ y $xy\in P \Rightarrow x\in P$ o $y\in P$ ← def de ideal primo (P ideal)

$xy\notin P \Leftarrow x\notin P$ e $y\notin P$

$\mathbb{Z}$ $\quad \langle p\rangle$ donde p es primo ó $p\mathbb{Z}\subset\mathbb{Z}$

$p\mathbb{Z}=\{z\in\mathbb{Z}: p\mid z\}$ $\boxed{\text{ideal primo}}$ $z_1z_2\in\mathbb{Z}$ y $z_1z_2\in p\mathbb{Z}$
$\Rightarrow z_1\in p\mathbb{Z}$ ó $z_2\in p\mathbb{Z}$

$$15 = z_1 \quad 21 = z_2$$

$p \mid z_1 z_2 \Rightarrow p \mid z_1$ ó $p \mid z_2$ $\qquad 3 \mid 15 \cdot 21 \to 3 \mid 15 \quad 3 \mid 21$

$$15 = z_1 \quad 2 = z_2$$

$$3 \mid 15 \cdot 2 \quad 3 \mid 15 \quad 3 \nmid 2$$

p primo $\{z : p \nmid z\}$ un conjunto multiplicat.

$\quad$ "

$\mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$ $\qquad p \nmid z \wedge p \nmid w \to p \nmid zw$

$\qquad p \mid zw \to p \mid z$ ó $p \mid w$

$a \in \mathbb{Z}$ $\qquad S_a = \{1 \ a \ a^2 \ a^3 \ \dots \}$

Ej. $a = 6$ $\qquad S_6 = \{1, 6, 36, \dots \}$

//

Dominio ~~es~~ un anillo sin divisores de cero salvo el 0.

Dominio de integridad

x es divisor de cero si $\exists y : xy = 0$

eg un elemento nilpotente si: $\exists n \ x^n = 0 \quad x(x^{n-1}) = 0$

Nil $\subset$ Div de cero.

Sea A anillo conmutativo y $S \subset A$ conjunto multiplicativo.

$a \in A$ es nilpotente $S_a = \{1, a, a^2, \dots, 0\}$

Se puede localizar poniendo denominadores en un conjunto multiplicativo

$\mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbb{Q}$ $\qquad m/$

$\mathbb{Z} - \{0\}$ es un conjunto multiplicativo de $\mathbb{Z}$.

Obs Un anillo conmutativo es un dominio $\mathcal{D}$ si $\forall x, y \in D$ $x \neq 0$ e $y \neq 0 \Rightarrow (xy \neq 0)$

$\mathbb{Z}, k[x], k \ldots$

A un anillo S conjunto multiplicativo, e.g.

$$\mathbb{Q} \quad \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \quad \sim \qquad (a,b) \sim (c,d) \text{ sii } ad = bc$$

$$\underset{A}{\uparrow} \quad \underset{S}{\downarrow} \qquad a/b = [(a,b)] \qquad a/b = c/d \leftrightarrow ad = bc$$

Defn Dado A anillo conmutativo y S un conjunto multiplicativo

Se define en $A \times S = \{(a,s) : a \in A \; s \in S\}$

una relación de equivalencia

$$(a,s) \sim (b,t) \text{ si } \exists r \in S : r(at - bs) = 0.$$

(1.) $[(a,s) \sim (b,t)] \wedge [(b,t) \sim (c,l)] \Rightarrow (a,s) \sim (c,l)$

$r_1(at - bs) = 0 \wedge r_2(bl - ct) = 0 \Rightarrow r_3(al - cs) = 0$

$r_1 at - r_1 bs = 0 \quad r_2 bl - r_2 ct = 0 \rightarrow r_3 al - r_3 cs = 0$

$r_2 l r_1 at - r_2 l r_1 bs = 0 \quad r_1 s r_2 bl - r_1 s r_2 ct = 0 \Rightarrow \ldots$

$r_2 l r_1 at - r_1 s r_2 ct = 0$

$r_1 r_2 tal - r_1 r_2 tcs = r_1 r_2 t(al - cs) = 0 \qquad \underset{S}{r_1 r_2 t} = r_3$

$(a,r) \sim (b,t) \Rightarrow (b,t) \sim (a,r)$

$r_1(at - br) = 0 \longrightarrow r_2(br - at) = 0$

$r_1 at = r_1 br \rightarrow r_1(-at) = r_1(-br) \rightarrow r_1(-at + br) = 0$

$(a,r) \sim (a,r) \qquad \underset{S}{1}(ar - ra) = 0$

$$[(a,r)] = \{(b,s) : \exists\, l \in S \quad l(as-br)=0\}$$

$$A_S = \{[(a,r)] : a \in A \quad s \in S\}$$

$$[(a,r)] = \frac{a}{r} \qquad \frac{a}{r}+\frac{b}{s} = \frac{as+br}{rs} = [(as+br,sr)]$$

$$[(a,r)]+[(b,s)] = [(as+br,sr)]$$

$$\left.\begin{array}{l}(a,r)\sim(a',r') \\ (b,s)\sim(b',s')\end{array}\right| \longrightarrow (as+br,rs)\sim(a's'+b'r',r's')$$

$$t\big((as+br)r's' - (a's'+b'r')rs\big)=0$$

$$\vdots$$

lo mismo para el producto.

<u>Obs</u> S puede contener al 0. pues si $0 \in S$ $\qquad \{0\}$

$(a,s)\sim(b,t)$ $\forall\, a,s,b,t$ $\qquad 0=1$

$0.(at-bs)=0$

$$\boxed{A_S = \{0\}}$$

<u>Teorema</u> A anillo conmutativo $S \subset A$ conjunto multiplicativo A_S (definido como antes) es un anillo

<u>Obs</u> $[(1,s)]$ representa un elemento de A_S $\qquad \frac{r}{s}\cdot\frac{t}{l} = \frac{rt}{sl}$

$[(s,1)]$ es inverso de $(1,s)$

$$[(1,s)]\cdot[(s,1)] = [(s,s)] = [(1,1)] \qquad [(1,1)] = 1_{A_S}$$

$$1(s1-s1)=0$$

$$A \longrightarrow A_S$$
$$a \longrightarrow [(a,1)]$$
$$\frac{r}{s} \longrightarrow [(s,1)] = (1,s)^{-1}$$