Práctico 4.

1. Sea X un conjunto cualquiera y $P(X)$ el conjunto de los subconjuntos de X. Es $(P(X), \cup = +, \cap = \cdot)$ un anillo

Es $(P(X), +, \cap)$ definidos como

$+ = \Delta =$ diferencia simétrica o sea $A \Delta B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$

$\cdot = \cap$ o sea $A \cdot B = A \cap B$

Es conmutativo, tiene unidad?

Obs se puede definir anillo sin unidad eliminando el axioma de $\exists\, 1$ y todo lo que involucraran al 1.

2. Sea $(G, +)$ un grupo abeliano. Es $(G, +, \cdot)$ con $a \cdot b = 0$ $\forall a, b$ un anillo sin unidad?

3. En $M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ con la suma y el producto de matrices, es $M \subset M_2(\mathbb{R})$ $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ un subanillo?

¿Es conmutativo? ¿Tiene unidad?

4 Encontrar todos los morfismos de anillos de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$

5 Supongamos que tenemos un "anillo" con unidad pero tal que la + no es necesariamente conmutativa pero cumple todos los axiomas. Probar que debe de ser conmutativa la suma. o sea debe de ser un anillo.

a) Probar primero que $b \cdot (-1) = -b$

b) Probar luego que $0 = (b+a)0 = (b+a)(-1+1) = (b+a)(-1) + b + a$

por lo que $(b+a) = -(b+a)(-1)$

6 Probar que R es un anillo sin nilpotentes no nulos si R no tiene 2-nilpotentes propios o sea $r^2 = 0 \to r = 0$.

7 Sea un anillo R sin nilpotentes (salvo el cero). Probar que $\forall$ idempotente e y todo $x \in R$ $xe = ex$

Sug: calcular $(xe - exe)^2$ y $(ex - exe)^2$ y usar ej 6

8. Probar que $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}$ es un subanillo.

$\{(a, b) : a, b \in \mathbb{Z}\}$ con operaciones $(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$

y $(a, b).(c, d) = (ac + bd, ad + bc)$

9) Sea A un grupo abeliano y $End(A) = \{f : A \to A$ morfismo de grupos$\}$

Probar que con la op de suma $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$

y composición $(f \cdot g)(a) = f(g(a))$ $(End(A), +, \circ)$

es un anillo.