Clase 11, 29/09/2023

Rigidez Comenzaremos con un ejercicio del práctico 3

Ejercicio V, W son espacios vectoriales cualesquiera tenemos un transf lineal $V^* \otimes W \xrightarrow{\Gamma} Hom(V,W)$, que estudiaremos más adelante

Si $W = k$ $V^* = Hom(V,k) = \{f : V \to k : f \text{ lineal}\}$ se llama espacio dual.

· $\dim(Hom(V,W)) = \dim_V \cdot \dim_W$ $\dim V^* = \dim V \cdot 1 = \dim V$

Construcción de la base dual

$e_1 \dots e_n$ V

definimos $e_1^*, \dots e_n^* : V \to k$

V V^*

$\underbrace{e_1, \dots e_n}$ $\underbrace{e_1^*, \dots, e_n^*}$

base $\longrightarrow \mathcal{B}$ $\mathcal{B}^* \leftarrow$ base dual

$e_1^*(e_1) = 1$ $e_1^*(e_2) = 0$ $\dots e_1^*(e_n) = 0$

$e_2^*(e_1) = 0$ $e_2^*(e_2) = 1$ $\dots$

Propiedad importante de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}^*$

$e_1 \dots e_n$ $e_1^* \dots e_n^*$

$\cap$ $\cap$

V V^*

Igualdades fundamentales

$\boxed{f = \sum f(e_i) e_i^*}$ $e_i^* : V \to k$, $f \in V^*$

$\boxed{v = \sum e_i\, e_i^*(v)}$, $v \in V$

Dem

$f = \sum f(e_i) e_i^* : V \to k$

$f = \sum_i f(e_i) e_i^*$ evaluando e_j

$f(e_j) \stackrel{?}{=} \sum_i f(e_i) e_i^*(e_j)$

$f(e_j) = f(e_j)\, e_j^*(e_j)$

Como los términos de la igualdad a probar coinciden en una base ya está demostrado

Para probar

$v = \sum e_i\, e_i^*(v)$ calculamos en e_j^* y tenemos

$e_j^*(v) = \sum_i e_j^*(e_i)\, e_i^*(v) = e_j^*(e_j) e_j^*(v) = 1 \cdot e_j^*(v)$

solo queda algo no nulo si $i = j$

Luego $\forall j$ $e_j^*(v) = e_j^*(\sum_i e_i e_i^*(v))$.

Obs Si v, w son tales que $e_i^*(v) = e_i^*(w)$ $\forall i$, entonces $v = w$

Como e_i^* es base de $V^* \Rightarrow \forall f \in V^*$ $f(v) = f(w) \Rightarrow f(v - w) = 0$. O sea que quiero probar que si $u \in V$: $f(u) = 0$ $\forall f \in V^* \Rightarrow u = 0$. Si $u \neq 0$ lo completo a una base $u_1^{u}, u_2 \dots u_n$ y defino $f \in V^*$: $f(u) = 1$ $f(u_2) = 0, \dots f(u_n) = 0$ pero es absurdo porque $f(u) = 0$ $\forall f$.

· Defn $V^* = \{f : V \to k\}$ $\quad \dim V^* = V$

$e_1 \cdots e_n$ nos da $e_1^*, \dots, e_n^*$ vale que $\left[\; f = \sum f(e_i)\, e_i^* \qquad v = \sum e_i\, e_i^*(v) \;\right]$ (*)

Defn $V^* \otimes V \xrightarrow{ev} k$, $\quad f \otimes v \mapsto f(v)$; $\quad k \xrightarrow{coev} V \otimes V^*$, $\quad 1 \mapsto \sum e_i \otimes e_i^*$

El primer mapa ev se define como cuando por la prop universal $V^* \times V \to k$, $(f,v) \to f(v)$ es bilineal luego para el cociente

$$\begin{tikzcd} V^* \times V \arrow[r] \arrow[d, "\otimes"'] & k \\ V^* \otimes V \arrow[ur, "ev"'] & \end{tikzcd}$$

Se puede probar (si a alguien le interesa se puede hacer una exposición sobre eso para aprobar el curso) que las igualdades * en rojo son equivalentes con propiedades del par de mapas (coev, ev) en [illegible]

Teorema Si V, W son espacios vectoriales cualesquiera existe una t.l. $V^* \otimes W \xrightarrow{\Gamma} Hom(V,W)$ tal que $\Gamma(f \otimes w)(v) = f(v)\, w$

Dem. Se define $b : V^* \times W \longrightarrow Hom(V,W)$

$b(f,w) : V \to W \in Hom(V,W) \qquad b(f,w)(v) = f(v)\, w$

Es claro que $b(af,w) = a\, b(f,w)$ y $b(f_1+f_2, w) = b(f_1,w) + b(f_2,w)$ y algo del mismo tipo en la segunda variable

$b(f, aw) = a\, b(f,w) \qquad b(f, w_1+w_2) = b(f,w_1) + b(f,w_2)$.

P.e. $b(f, w_1+w_2)(v) = f(v)(w_1+w_2) = f(v)\, w_1 + f(v)\, w_2 = b(f,w_1)(v) + b(f,w_2)(v)$

$$\begin{tikzcd} V^* \times W \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\otimes"'] & Hom(V,W) \\ V^* \otimes W \arrow[ur, "\hat{b}"'] & \end{tikzcd}$$

Dado b $\exists\, \hat{b}$ que hace el diagrama conmutativo o sea $\hat{b} \circ \otimes = b$ o sea si calculamos en $\xi = f \otimes w$ tenemos que $b(f \times w) = (\hat{b} \circ \otimes)(f,w) = \hat{b}(f \otimes w)$ $\quad \hat{b} = \Gamma$

o sea que $\Gamma(f \otimes w) = b(f \times w)$ y $\Gamma(f \otimes w)(v) = b(f \times w)(v) = f(v)\, w$.

Teorema Si V tiene dim finita $\Rightarrow$ Γ es inyectiva. Si W tiene dim finita Γ es un isomorfismo

Dem $\Gamma\left(\sum_{i=1}^{t} f_i \otimes w_i\right) = 0$ $\quad \langle f_1, \dots, f_t \rangle \subset V^*$ luego cada $f_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} e_j^*$ base dual de una base de v. $\quad n = \dim V$

Luego $\displaystyle\sum_{i=1,j}^{t,n} \alpha_{ij}\, e_j^* \otimes w_i = \sum_{j=1}^{n} e_j^* \otimes \sum_{i=1}^{t} \alpha_{ij} w_i = \sum_{j=1}^{n} e_j^* \otimes u_j$ con

$u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, w_i$

Si escribimos $\displaystyle\sum_{i=1}^{t} f_i \otimes w_i = \sum_{j=1}^{n} e_j^* \otimes u_j$ y suponemos que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \Gamma(e_j^* \otimes u_j) = 0$ $\quad \forall v \in V$

quiere decir que $\forall v \in V$ $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} e_j^*(v)\, u_j = 0$ $\forall v$ si tomo $v = e_i$ $\Rightarrow$ $u_i = 0$

si $\Gamma\left(\sum f_i \otimes w_i\right) = 0 \Rightarrow \sum f_i \otimes w_i = \sum e_j^* \otimes u_j = 0$

Si dim W es finita dim Hom(V,W) = dim V . dim W

dim $(V^* \otimes W)$ = dim V^* . dim W = dim V dim W

Entonces sobre si sabemos que dim$(L \otimes S)$ = dim L dim S por ev.

$\blacksquare$

<u>Teorema</u> Si L y S son e.v de dim finita $\Rightarrow$ dim L . dim S = dim $(L \otimes S)$

<u>Dem</u> Si $v_1 \dots v_n$ y $w_1 \dots w_m$ son bases de V y W $\Rightarrow$

$\mathcal{B} = \{v_i \otimes w_j : i = 1 \dots n \; j = 1 \dots m\}$ es base de $V \otimes W$.

Los elementos del producto tensorial son $\sum v_i \otimes w_i$ luego basta con probar que todo elemento $v \otimes w$ (tensor elemental) se genera por $\mathcal{B}$ es claro pues si genera $v = \sum a_i v_i \quad w = \sum b_j w_j$

$$\Rightarrow v \otimes w = \sum_{ij} a_i b_j \, v_i \otimes w_j$$

Además los elementos de $\mathcal{B}$ son l.i. $\sum \lambda_{ij} v_i \otimes w_j = 0$

$v_1^* \dots v_n^*$ de la base dual y considero $\forall k = 1 \dots \quad v_k^* : V \to k$

$v_k^* \otimes id_W : V \otimes W \to k \otimes W = W$ y luego

$$0 = (v_k^* \otimes id) \left(\sum_{ij} \lambda_{ij} v_i \otimes w_j \right) = \sum_{ij} \lambda_{ij} v_k^*(v_i) \otimes w_j = \sum_j \lambda_{kj} w_j = 0$$

Pero como $w_1 \dots w_m$ son l.i. $\lambda_{kj} = 0 \quad \forall k, j$

$\blacksquare$

Hemos usado que dados $T : V \to V'$, $S : W \to W'$ $\Rightarrow \exists$

$T \otimes S : V \otimes W \to V' \otimes W'$ y que $k \otimes W \xrightarrow{\sim} W \quad \lambda \otimes w \to \lambda w$

es un isomorfismo (ejercicio).