

Clase 11, 29/09/2023

Rigidez Comenzaremos con un ejercicio del práctico 3

Ejercicio V, W son espacios vectoriales cualesquiera tenemos un transf lineal $V^* \otimes W \xrightarrow{\quad} \text{Hom}(V, W)$, que estudiaremos más adelante

Si $W=k$ $V^* = \text{Hom}(V, k) = \{ f: V \rightarrow k : f \text{ lineal} \}$ se llama espacio dual.

$\dim(\text{Hom}(V, W)) = \dim V \cdot \dim W$ $\dim V^* = \dim V \cdot 1 = \dim V$

Construcción de la base dual

$$\begin{array}{ccc} V & & V \\ e_1, \dots, e_n & & e_1^*, \dots, e_n^* \\ \underbrace{\hspace{2cm}} & & \underbrace{\hspace{2cm}} \\ \text{base} \rightarrow B & & B^* \leftarrow \text{base dual} \end{array}$$

definimos $e_1^*, \dots, e_n^* : V \rightarrow k$
 $e_1^*(e_1) = 1 \quad e_1^*(e_2) = 0 \quad \dots \quad e_1^*(e_n) = 0$
 $e_2^*(e_1) = 0 \quad e_2^*(e_2) = 1 \quad \dots$

Propiedad importante de B, B^*

$$\begin{array}{ccc} e_1, \dots, e_n & & e_1^*, \dots, e_n^* \\ \uparrow & & \uparrow \\ V & & V^* \end{array}$$

Igualdad fundamental:
 $f = \sum f(e_i) e_i^* \quad e_i^*: V \rightarrow k$
 $v = \sum e_i e_i^*(v)$
 evaluando $f = \sum f(e_i) e_i^*$
 $f(e_j) = \sum f(e_i) e_i^*(e_j)$
 $f(e_j) = f(e_j) e_j^*(e_j)$
 Como los términos de la igualdad a proba coinciden en una base ya está demostrado

Para probar

$v = \sum e_i e_i^*(v)$ calculamos en e_j^* y tenemos
 $e_j^*(v) = \sum e_i^*(e_j) e_i^*(v) = e_j^*(e_j) e_j^*(v) = 1 \cdot e_j^*(v)$
↑ solo queda algo no nulo si $i=j$

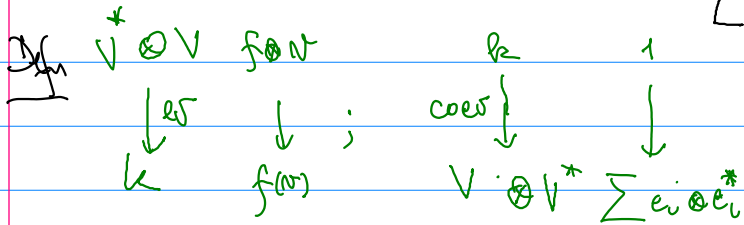
Luego $\forall j \quad e_j^*(v) = e_j^*(\sum e_i e_i^*(v))$

Obs Si v, w son tales que $e_i^*(v) = e_i^*(w) \quad \forall i$, entonces $v=w$

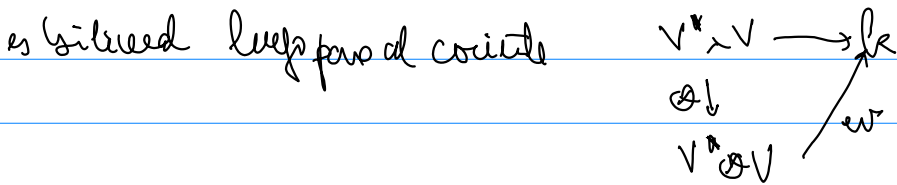
Como e_i^* es base de $V^* \Rightarrow \forall f \in V^* \quad f(v) = f(w) \Rightarrow f(v-w) = 0$. O sea que para probar que si $u \in V : f(u) = 0 \quad \forall f \in V^* \Rightarrow u = 0$. Si $u \neq 0$ lo completamos a una base u, u_2, \dots, u_n y definimos $f \in V^* : f(u) = 1 \quad f(u_2) = 0, \dots, f(u_n) = 0$ pero no es necesario porque $f(u) = 0 \quad \forall f$.

Definición $V^* = \{f: V \rightarrow k\}$ da $V^* = V$

$$e_1, \dots, e_n \rightsquigarrow e_1^*, \dots, e_n^* \text{ vale que } \left[\begin{array}{l} f = \sum f(e_i) e_i^* \\ v = \sum e_i c_i^*(v) \end{array} \right] \textcircled{A}$$



El primer mapa se define como cubo para lo prop universal $V^* \times V \rightarrow k$
 $(f, v) \rightarrow f(v)$



Se puede probar (si a alguien le interesa se puede hacer una exposición sobre eso para aprobar el curso) que los cubos \otimes en rojo son equivalentes con propiedades del producto tensorial (coer, ev) en verde

Teorema Si V, W son espacios vectoriales cualesquiera existe un Γ

$$V^* \otimes W \xrightarrow{\Gamma} \text{Hom}(V, W) \text{ tal que } \Gamma(f \otimes w)(v) = f(v)w$$

Dem. Se define $b: V^* \times W \rightarrow \text{Hom}(V, W)$

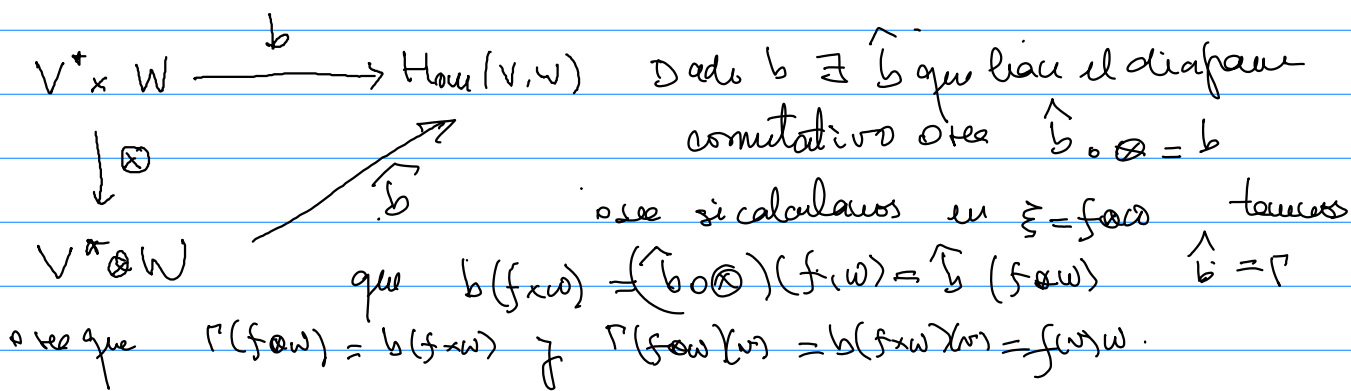
$$b(f, w): V \rightarrow W \in \text{Hom}(V, W) \quad b(f, w)(v) = f(v)w$$

$$\text{Es claro que } b(af, w) = a b(f, w) \text{ y } b(f_1 + f_2, w) = b(f_1, w) + b(f_2, w)$$

y algo del mismo tipo en la segunda variable

$$b(f, aw) = a b(f, w) \quad b(f, w_1 + w_2) = b(f, w_1) + b(f, w_2)$$

$$\text{P.e. } b(f, w_1 + w_2)(v) = f(v)(w_1 + w_2) = f(v)w_1 + f(v)w_2 = b(f, w_1)(v) + b(f, w_2)(v)$$



Teorema Si V tiene dim finita $\Rightarrow \Gamma$ es suryectiva. Si W tiene dim finita Γ es un isomorfismo

Dado $\Gamma(\sum_{i=1}^t f_i \otimes w_i) = 0$ $\langle f_1, \dots, f_t \rangle \subset V^*$ luego cada $f_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} e_j^*$ base dual de una base de V .

$$\text{Luego } \sum_{i=1}^t \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} e_j^* \otimes w_i = \sum_{j=1}^n e_j^* \otimes \sum_{i=1}^t \alpha_{ij} w_i = \sum_{j=1}^n e_j^* \otimes u_j \text{ con}$$

$$u_j = \sum_{i=1}^t \alpha_{ij} w_i$$

Si escribimos $\sum_{i=1}^t f_i \otimes w_i = \sum_{j=1}^n e_j^* \otimes u_j$ y suponemos que $\sum_{j=1}^n \Gamma(e_j^* \otimes u_j) = 0$

queremos decir que $\forall v \in V \sum_{j=1}^n e_j^*(v) u_j = 0$ $\forall v$ si tomamos $v = e_i \Rightarrow u_i = 0$

$$\text{si } \Gamma(\sum f_i \otimes w_i) = 0 \Rightarrow \sum f_i \otimes w_i = \sum e_j^* \otimes u_j = 0$$

Si $\dim W$ es finito $\dim(V \otimes W) = \dim V \cdot \dim W$

$$\dim(V^* \otimes W) = \dim V^* \cdot \dim W = \dim V \cdot \dim W$$

Entonces es sorprendente saber que $\dim(L \otimes S) = \dim L \cdot \dim S$ por ev. □

Teorema Si L y S son ev de dim finita $\Rightarrow \dim(L \otimes S) = \dim L \cdot \dim S$

Dem Si v_1, \dots, v_n y w_1, \dots, w_m son bases de V y $W \Rightarrow$

$B = \{v_i \otimes w_j : i=1, \dots, n, j=1, \dots, m\}$ es base de $V \otimes W$.

Los elementos del producto tensorial son $\sum v_i \otimes w_j$, luego basta comprobar que todo elemento $n \otimes w$ (tensor elemental) se genera por B usas dos por si que $n = \sum a_i v_i$, $w = \sum b_j w_j$

$$\Rightarrow n \otimes w = \sum_{ij} a_i b_j v_i \otimes w_j$$

Ademas los elementos de B son l.i. $\sum \lambda_{ij} v_i \otimes w_j = 0$

v_1^*, \dots, v_n^* de la base dual y consideramos $k=1, \dots, n$ $v_k^*: V \rightarrow k$

$v_k^* \otimes \text{id}_W: V \otimes W \rightarrow k \otimes W = W$ y luego

$$0 = (v_k^* \otimes \text{id}_W) \left(\sum_{ij} \lambda_{ij} v_i \otimes w_j \right) = \sum_{ij} \lambda_{ij} v_k^*(v_i) \otimes w_j = \sum_j \lambda_{kj} w_j = 0$$

Pero como w_1, \dots, w_m son l.i. $\lambda_{kj} = 0 \quad \forall k, j$ □

Hemos usado que dados $T: V \rightarrow V'$, $S: W \rightarrow W' \Rightarrow \exists$

$T \otimes S: V \otimes W \rightarrow V' \otimes W'$ y que $k \otimes W \xrightarrow{\cong} W$ $\lambda \otimes w \rightarrow \lambda w$ es un isomorfismo (ejercicio).