5) Sea R un anillo conmutativo. Un ideal M se dice maximal si $M \neq R$ y I es un ideal $M \subseteq I \subseteq R$ debe ser igual a M. Se prueba (ver teórico) que $\forall\, I \subsetneq R$ ideal $\exists$ un ideal maximal M: $I \subseteq M \subsetneq R$.

Se define el radical de Jacobson de R como $J(R) = \bigcap\{M : M \text{ ideal maximal de } R\}$

a) Probar que $J(R) = \{x \in R : 1 - xy \in U(R) \ \forall\, y \in R\}$

(i) Queremos probar que $J(R) \subseteq \{x \in R : 1 - xy \in U(R)\ \forall\, y \in R\}$

La negación es $\exists\, x \in J(R) : x \notin \{x \in R : 1 - xy \in U(R)\ \forall\, y \in R\}$

O sea dado x $\exists\, y_x \in R : 1 - xy_x \notin U(R)$

Si $1 - xy_x \notin U(R) \Longrightarrow \exists$ ideal $M_x : 1 - xy_x \in M_x$ con M_x maximal

Como $x \in M_x$ por def de radical de Jacobson $\Rightarrow 1 = xy_x + m_x \quad m_x \in M_x$.

Luego $1 \in M_x$, absurdo.

ii) Queremos probar que $\{x \in R : 1 - xy \in U(R)\ \forall\, y \in R\} \subset \bigcap\{M : M \text{ max en } R\}$

Supongamos que existe $x : 1 - xy \in U(R)\ \forall\, y \in R$ y que $x \notin \bigcap\{M : M \text{ maximal}\}$

o sea x es tal que $1 - xy \in U(R)\ \forall\, y \in R$ y $\exists\, M_x : x \notin M_x$

En ese caso si $x \notin M_x$ el ideal $\langle M, x\rangle = R$ o sea $1 = m_x + xy$ para $y \in R$

$\Rightarrow 1 - xy \in M_x$. Si $1 - xy$ es inversible no puede estar en un ideal M_x propio.

b) Deducir que $Nil(R) \subseteq J(R)$. (Ver ej 4a)

Supongamos que $z \in Nil(R)$. Si $z \in Nil(R) \Rightarrow zy \in Nil(R) \ \forall\, y \in R \Rightarrow 1 - zy \in U(R) \ \forall\, y \in R$ [Ej 4a]

$\Rightarrow z \in J(R)$ por parte a)