Clase 10; Set 21 2023.

Producto tensorial.

Previo módulos cociente.

Sea A un anillo y M un A-modulo (es semejante para mod-A ó A-mod-B - también denotado ${}_AM$; M_A; ${}_AM_B$)

Dado un submódulo $N \subset M$ se define una relación de equivalencia en M $\sim_N$ así: $m \sim m'$ si $m - m' \in N$.

Dem es una rel de equivalencia $m \sim m$ pues $m - m = 0 \in N$

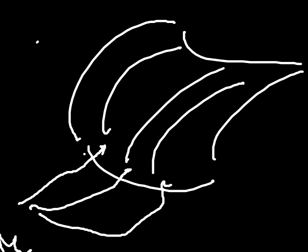
$m \sim m' \Rightarrow m' \sim m$ $\quad m - m' = -(m' - m)$

luego si $m - m' \in N$ $\quad m' - m \in N$

$m \sim m' \sim m'' \Rightarrow m \sim m''$

$m - m' \in N$, $\quad m' - m'' \in N$, $\quad m - m'' = m - m' + (m' - m'') \in N + N \subset N$ ∎

Se define $M/N = \{[m] : m \in M\}$



$M = \bigcup [m]$

y $[m] \cap [m'] \neq \emptyset \Rightarrow [m] = [m']$

Teorema Se define en M/N operaciones y elementos de la siguiente manera: $[m] + [m'] = [m + m']$

$a[m] = [am]$ $\quad a \in A$ $\quad m, m' \in M$

y $0_{M/N} = [0_M]$

Vale que M/N es un A-modulo con esas operaciones.

Dem p.e. $\begin{matrix} m \sim l \\ m' \sim l' \end{matrix} \Rightarrow m + m' \sim l + l'$; $m + m' - (l + l') = m - l + m' - l' \in N + N = N$ etc

Teorema Se define $\pi : M \to M/N$ $\quad \pi(m) = [m]$.

el par $(M/N; \pi : M \to M/N)$ verifica que:

(1) π morfismo de módulos (2) $\operatorname{Ker} \pi = N$ y π es sobre (3) Si L es otro módulo y $\rho : M \to L$ es un morfismo de A-modulos: $\operatorname{Ker} \rho \supseteq N \Rightarrow$ $\exists! \hat{\rho} : M/N \to L$: el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\pi"'] & L \\ M/N \arrow[ur, "\hat{\rho}"'] & \end{tikzcd}$$

$\operatorname{Ker} \hat{\rho} = \operatorname{Ker} \rho / N$

$\operatorname{Im} \hat{\rho} = \operatorname{Im} \rho$

Dem. $\pi(m + l) = [m + l] = [m] + [l] = \pi(m) + \pi(l)$

$\pi(am) = [am] = a[m] = a\pi(m)$

$Ker\,\pi = \{m : [m] = 0\}$ $[m] = 0 = [0] \Rightarrow m - 0 \in N \Rightarrow m \in N$

y si $m \in N$ $m \sim 0 \Rightarrow [m] = [0]$

Si (L, ρ) es un par tal que $N \subseteq Ker\,\rho \Rightarrow$ definimos $\hat{\rho} : M/_N \to L$

como $\hat{\rho}([m]) = \rho(m)$.

Hay que probar que $\hat{\rho}$ esta definido correctamente. Si $[m] = [l]$

$\Rightarrow \rho(m) = \rho(l)$. Efectivamente si $[m] = [l] \Rightarrow m - l = n \in N$

luego $\rho(m) - \rho(l) = \rho(n)$. Pero $\rho(n) = 0$ pues $n \in N \subseteq Ker\,\rho \Rightarrow \rho(n) = 0$

$\Rightarrow \hat{\rho}([m]) = \hat{\rho}([l])$.

$Ker\,\hat{\rho} = \{[m] : \hat{\rho}([m]) = 0\} = \{[m] : \hat{\rho}(m) = \rho(m) = 0\}$

si $\rho(m) = 0 \Rightarrow m \in Ker\,\rho$.

$Ker\,\hat{\rho} = \{[m] : m \in Ker\,\rho\} = Ker\,\rho/_N$.

Luego $Ker\,\hat{\rho} = Ker\,\rho/_N$ y además en el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\pi"'] & L \\ M/_N \arrow[ur, "\hat{\rho}"'] & \end{tikzcd}$$

$\hat{\rho}(M/_N) = \hat{\rho}(\pi(M))$ π es sobre

luego $\hat{\rho}(M/_N) = Im\,\hat{\rho} = (\hat{\rho} \circ \pi)(M) = \rho(M)$. ■

Aplicación al álgebra lineal

Teo de alg lineal. Si $V \xrightarrow{\rho} W$ es una t.l y V dim finita $\Rightarrow Ker\,\rho$ tiene dim finita y la imagen de ρ tiene dimensión finita y la $\dim(Ker\,\rho) + \dim(Im\,\rho) = \dim V$

Dem Sea $V \xrightarrow{\rho} W$ ..... $V \longrightarrow Im\,\rho \hookrightarrow W$ es sobre $Im\,\rho$ y además

sabemos que $V/_{Ker\,\rho} \cong Im\,\rho$ $\dim(Im(\rho)) = \dim(V/_{Ker\,\rho})$

↑ vale para módulos en general

Obs Vale siempre que si $L \subset V \Rightarrow \dim(V/_L) = \dim V - \dim L$

$\Rightarrow \dim Im\,\rho = \dim V - \dim Ker\,\rho$ ■

Dem obs (Ejercicio) Tomar una base de L y completarla a una de V los vectores que completamos en el cociente dan una base de $V/_L$

Productos tensoriales

Teorema Dados V y W esp vect existe otro espacio que llamamos $V \otimes W$ y un mapa bilineal $V \times W \xrightarrow{\otimes} V \otimes W$.

Para todo otro $\forall \rho$ $V \times W \xrightarrow{\rho} U$ bilineal $\exists!\ \hat{\rho}$ lineal : el diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\otimes"'] & U \\ & V \otimes W \arrow[u, "\hat{\rho}"'] \end{tikzcd}$$

Dem Si X es un conjunto cualquiera $Fun(X, k)$ donde k es un cuerpo es siempre un e.v. con la suma de funciones y el producto de una función por un escalar punto a punto.

Llamamos $Fun_f(X, k) = \{f : X \to k : f(x) = 0\ \forall x \notin F \subset X\ \ F \text{ finito}\}$

Si llamamos $\delta_x \in Fun_f(X, k)$ la función $\delta_x(y) = \begin{cases} 1 & y = x \\ 0 & y \neq x \end{cases}$

y es claro que $\{\delta_x : x \in X\}$ es una base infinita de $Fun_f(X, k)$

Base infinita o base $B \subset V$ de un esp. vect. arbitrario. Es un subconjunto $B \subset V$: todo conjunto finito de B es l.i y $\forall v \in V$ $\exists$ $F_v \subset B$ finito :

$$v = \sum_{z \in F_v} a_z z.$$

Ejercicio a) Las funciones $\{\delta_x : x \in X\}$ son una base de $F_f(X, k) \subset F(X, k)$. Si X es infinito $F_f(X, k)$ es un esp vectorial de base X.

b) Se dice que $F_f(X, k)$ es el espacio vectorial libre de base X.

Hemos probado (Ejercicio) que $\forall$ conjunto X $\exists$ un espacio vectorial de base X y es simple ver que tal espacio es único a menos de isomorfismo.

c) Se cumple la siguiente propiedad universal (por brevedad escribimos $F_f(X, k) = L(X)$

Se verifica la siguiente propiedad universal, sea $X \xhookrightarrow{\iota} L(X)$ la inclusión $\iota(x)=\delta_x$. Se verifica la siguiente prop universal $\forall$ otro par $X \xrightarrow{g} V$ donde g es una función de X en un espacio vectorial V $\exists!\ \bar g : L(X)\to V$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\iota"'] & V \\ L(X) \arrow[ur, "\bar g"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta con $\bar g$ transformación lineal. $\bar g(\delta_x) = g(x)$

Esto anterior nos dice que las transformaciones lineales quedan determinadas por los valores que toman en una base

Tomemos ahora $L(V\times W) = \mathcal{F}_f(V\times W, k)$ y tenemos una base de $L(V,W)$ dada

$$B = \{\delta_{v,w} : v\in V\ w\in W\}$$

tomamos el subespacio $R \subset \mathcal{F}_f(V\times W, k)$

$$R = \langle \{\delta_{av+bv',w} - a\delta_{v,w} - b\delta_{v',w},\ \delta_{v,aw+bw'} - a\delta_{v,w} - b\delta_{v,w'} : a,b\in k,\ v,v'\in V,\ w,w'\in W\}\rangle$$

Definimos $V\otimes_k W = L(V\times W)/R$ o sea el espacio cociente del espacio libre con base $V\times W$ módulo el subespacio R

Consideremos el diagrama universal en dos etapas

$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\iota"] \arrow[dd, bend right=60, "\otimes_k = \pi\circ\iota"'] & U \\ L(V\times W) \arrow[ur, "\bar g"'] \arrow[d, "\pi"] & \\ V\otimes W = L(V\times W)/R \arrow[uur, dotted] & \end{tikzcd}$$

$\bar g$ es lineal y existe por la propiedad universal del esp libre generado por $V\times W$. La existencia de $\bar g$ no depende de la bilinealidad de g pero si g es bilineal lo podemos pasar al cociente por π y producir el mapa punteado. Tenemos que

Ejercicio $\otimes_k$ es bilineal (p.e $\iota(av,w) = \delta_{av,w}$ y

$$av\otimes w = \pi\iota(av,w) = \pi(\delta_{av,w}) = \pi(\delta_{av,w} + \underbrace{(a\delta_{v,w} - \delta_{av,w})}_{R}) = \pi(a\delta_{v,w}) = [a\delta_{v,w}] = a[\delta_{v,w}]$$

$$= a(\pi\iota(v,w)) = a(v\otimes w)$$

Existencia y unicidad de $\hat g$. Tenemos que verificar que $\bar g$ pasa al cociente y para eso que $\bar g(R)=0$ o sea p.e $\bar g(\delta_{av+bv',w} - a\delta_{v,w} - b\delta_{v',w}) = g(av+bv',w) - a g(v,w) - b g(v',w) = 0$ ⊠

Unicidad $\bar g$ es única y $\hat g$ también.