Clase 9   15/09   Anillos y módulos

Producto tensorial   Situación general. $\otimes_A : {}_R\mathcal{M}_A \times {}_A\mathcal{M}_S \longrightarrow {}_R\mathcal{M}_S$

$$(M, N) \to M \otimes_A N$$

Teorema   Dados $M \in {}_R\mathcal{M}_A$ $N \in {}_A\mathcal{M}_S$

$\exists!$ módulo $M \otimes_A N \in {}_R\mathcal{M}_S$ y un mapa $\otimes_A : M \times N \longrightarrow M \otimes_A N$

$$(m,n) \xrightarrow{\otimes_A} m \otimes_A n$$

bilineal con ciertas propiedades que consideramos después

Mapas bilineales $M \in {}_R\mathcal{M}_A$, $N \in {}_A\mathcal{M}_S$ y $L \in {}_R\mathcal{M}_S$; $f : M \times N \to L$

es bilineal si

1) $f(m+m', n) = f(m,n) + f(m',n)$
2) $f(m, n+n') = f(m,n) + f(m,n')$
3) $f(rm, n) = r \cdot f(m,n)$
4) $f(m, n \cdot s) = f(m,n) \cdot s$

Productos tensoriales $M \in {}_R\mathcal{M}_A$ $N \in {}_A\mathcal{M}_S$ Notación $\otimes_A(m,n) = m \otimes_A n$

Se construyen dos cosas $M \otimes_A N \in {}_R\mathcal{M}_S$ y un mapa

$\otimes_A : M \times N \longrightarrow M \otimes_A N$ que es bilineal. Se construye el par $(\otimes_A, M \otimes_A N)$

y que verifica la siguiente propiedad

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\otimes_A"'] & X \\ M \otimes_A N \arrow[ur, "\hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$\forall$ otro par $(f : X)$ con las mismas hipótesis — $\exists!\ \hat{f}$: el diagrama conmuta

Lo que se ha construido es una función (Ver próxima página, donde está $**$)

$$\mathrm{Bil}(M \times N, X) \longrightarrow \mathrm{Lineales}(M \otimes_A N, X)$$
$$f \longmapsto \hat{f}$$

Lo que tenemos es un mecanismo para transformar problemas bilineales en problemas lineales. Dos variables nos Univariable en otro espacio

Dado un diagrama del tipo

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[d, "\otimes_A"'] & & X \\ M\otimes_A N \arrow[urr, "F"'] & & \end{tikzcd}$$

(**)

dado $F: M\otimes_A N \to X$ $\quad X\in {}_R\mathcal{M}_S$

i.e $F\in \mathrm{Lin}_{R,S}(M\otimes_A N, X)$

le asociamos

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Lin}_{R,S}(M\otimes_A N, X) \arrow[d, "\Gamma"] & F \arrow[d, mapsto] \\ \mathrm{Bil}_{RS}(M\times N, X) & F\circ\otimes_A = \Gamma(F) \end{tikzcd}$$

La propiedad de la pagina anterior dice que ese mapa es un isomorfismo porque dado f $\exists!\, \hat{f}$:

$$\begin{tikzcd} \hat{f} \arrow[d, mapsto] \\ \Gamma(\hat{f}) = \hat{f}\circ\otimes_A \end{tikzcd}$$

Espacios vectoriales

Para un anillo conmutativo ${}_A\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}_A$ están en correspondencia biunívoca $(M,\cdot)$ $\cdot : A\times M \to M$ $\quad (M,*) : * : M\times A \to M$

$m*a = a\cdot m$

$(m*a)*b) = m*(ab)$; $(m*a)*b = b\cdot(m*a) = b(a\cdot m)$

$= (ba)\cdot m \overset{\downarrow}{=} (ab)\cdot m = m*(ab)$

Por eso es que en los espacios vectoriales tienen producto (acción) de los escalares de un lado.

Teorema Dado un cuerpo k y $V,W \in Vect_k$, existe un espacio vectorial $V\otimes_k W$ y una transf bilineal $\underset{V,W}{\otimes} : V\times W \to V\otimes_k W$ tal que

$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\otimes"'] & X \\ & V\otimes_k W \arrow[u, "\hat{f}"'] \end{tikzcd}$$

$\forall (f, X)$ $X \in Vect$, $f : V\times W \to X$ bilineal $\exists!\ \hat{f} : V\otimes_k W \to X$: el diagrama es conmutativo.

(Antes de la Dem algunas consideraciones en prox pag)

Dem Consideramos $L(V\times W) = \{ f : V\times W \to k : f(v,w) = 0$ excepto para un nº finito de pares $\}$

$= \{ f : V\times W \to k : \exists\, F_f \subset V\times W$ finito $: f(v,w) = 0 \ \forall (v,w) \notin F_f \}$

Es un espacio vectorial con la suma. Se puede dar un conjunto de generadores del espacio que son las δ de Dirac de los puntos $\delta_{(x,y)} : V\times W \to k$

$: \delta_{(x,y)}(x,y) = 1$ y $\delta_{(x,y)}(z,w) = 0 \quad (x,y) \neq (z,w)$

$L(V\times W) = \langle \delta_{(x,y)} : (x,y) \in V\times W \rangle$

Se toma el subespacio $R(V\times W) = \langle \delta_{ax+bx',y} - a\delta_{x,y} - b\delta_{x',y} , \delta_{x,ay+by'} - a\delta_{(x,y)} - b\delta_{(x,y')} \rangle$

Se define $V\otimes_k W = L(V\times W)/R(V\times W)$

Definición $V \otimes_k W = L(V \times W) / R(V \times W)$ (esta será la defin de prod tens)

(Construcción operativa) $A \subset B$ esp vectoriales B/A espacio cociente

$b \sim_A b'$ si $b - b' \in A$. $B/A = \{[b] : b \in B\}$ suma $[b] + [b']$

$= [b+b']$; $\lambda \in k$ $\lambda[b] = [\lambda b]$. Tenemos la proy canónica $\pi : B \to B/A$, $b \to [b]$

$\ker \pi = A$ y $\forall$ mapa lineal $B \xrightarrow{f} W$ esp vect

: $f(A) = 0$ $\exists \hat{f} : B/A \to W$: conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & W \\ B/A \arrow[ur, "\hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta etc

En nuestro caso $L(V, W) = \langle \delta_{(x,y)} : x \in V\ y \in W \rangle \subset \mathrm{Func}(V \times W, k)$

$\cup$

$R(V, W)$ donde teníamos las relaciones consideradas

$V \otimes_k W = L(V, W) / R(V, W)$ $\quad V \times W \xrightarrow{\otimes} V \otimes_k W$ $\quad (x, y) \to x \otimes y$

$\theta(x, y) = [\delta_{(x,y)}]$

$\delta_{(x,y)} \in L(V, W)$

Prueba de que θ es bilineal

$\theta(av + a'v', w) = a\,\theta(v, w) + a'\,\theta(v', w)$ etc

$[\delta_{(av + a'v', w)}] = a[\delta_{v,w}] + a'[\delta_{v',w}]$

$= [a\delta_{v,w} + a'\delta_{v'w}]$

$\delta_{av + a'v', w} - a\delta_{v,w} - a'\delta_{v'w} \in R(V, W)$

$\Rightarrow \theta$ es bilineal por def de R.

Luego $\otimes : V \times W \longrightarrow V \otimes W$ y falta la propiedad universal.

X Funciones(X, k) son un espacio vectorial

ψ

δ_x

$\underline{\underline{L(X)}}$ $\quad \delta_x(y) = \begin{cases} 1 & y = x \\ 0 & y \neq x \end{cases}$ $\quad \forall x \in X$

$\{\delta_x : x \in X\} \subset L(X)$ es una base

$$f = \sum_{x \in X} f(x)\,\delta_x$$

$$f(y) \quad \sum_{x \in X} f(x)\,\delta_x(y) = f(x)\,\delta_x(x) = f(x)$$

$W \subset V$ $\quad W, V$ ~~~~ $\in k$-esp.	$N \subset M$ $\quad M \in \mathcal{M}_A$ $\quad \underset{\text{submodulo}}{N} \subset M \in \mathcal{M}_A$ M/N

Constr del cociente de un modulo por un submodulo.

$N \subset M \qquad m,\ m' \in M \qquad m \underset{N}{\sim} m' \qquad m - m' \in N$

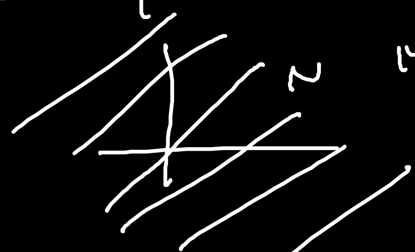
Rel de equivalencia $\qquad m \sim m' \sim m''$

$m - m' \in N \qquad m' - m'' \in N$

$m - \cancel{m'} + \cancel{m'} - m'' \in N \qquad m \underset{N}{\sim} m''$

$[m] \subset M$

$[m] = \{m' : m' - m \in N\} = \{m' : m' \in \underset{\sim\sim}{m + N}\} \subset M$



M/N es un modulo $\qquad [m] + [m'] = [m + m']$

$a[m] = [am]$

$0_{M/N} = [0_M]$